Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu



Partea VIII

Metoda variabilelor instrumentale. Identificarea în buclă închisă

Conţinut

1. Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
2. Exemplu Matlab
3. Garanţii de performanţă
4. Identificarea în buclă închisă folosind VI
5. Buclă închisă: Exemplu Matlab

Clasificare

Reamintim taxonomia modelelor din Partea I:

După numărul de parametri:

1. Modele parametrice: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut şi de obicei mic de parametri
2. Modele neparametrice: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri
   Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoştinţele disponibile în avans (“culoare”):

1. Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
2. Modele cutie neagră: complet necunoscute în avans
3. Modele cutie gri: parţial cunoscute

Ca şi metoda minimizării erorii de predicţie, metoda variabilelor instrumentale produce modele *cutie neagră*, *parametrice*, polinomiale.

Motivare

- Metoda ARX este simplă (regresie liniară),
  dar funcţionează doar pentru clase limitate de perturbaţii
- MEP funcţionează pentru orice perturbaţie (rezonabilă),
  dar este relativ complicată d.p.d.v. numeric

Putem găsi o metodă care combină ambele avantaje?

(rezervat) **Da! Metoda variabilelor instrumentale**

Conţinut

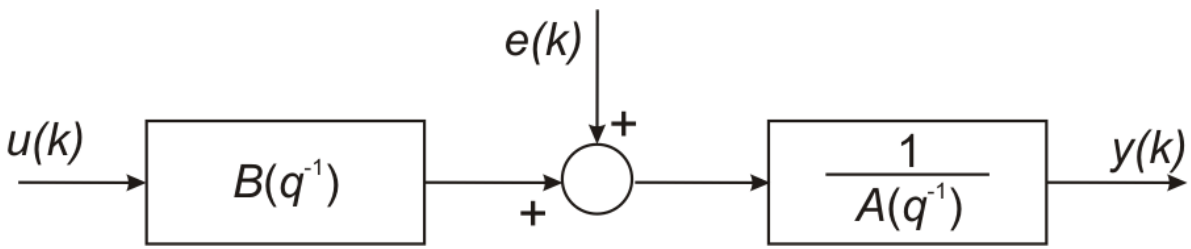
1. Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
   - Punct de start: ARX
   - Metoda variabilelor instrumentale
   - Comparaţie: VI versus MEP
2. Exemplu Matlab
3. Garanţii de performanţă
4. Identificarea în buclă închisă folosind VI
5. Buclă închisă: Exemplu Matlab

Reamintim: modelul ARX

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

$$(1+a_1 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na})y(k) =$$

$$(b_1 q^{-1} + \cdots + b_{nb} q^{-nb})u(k) + e(k)$$

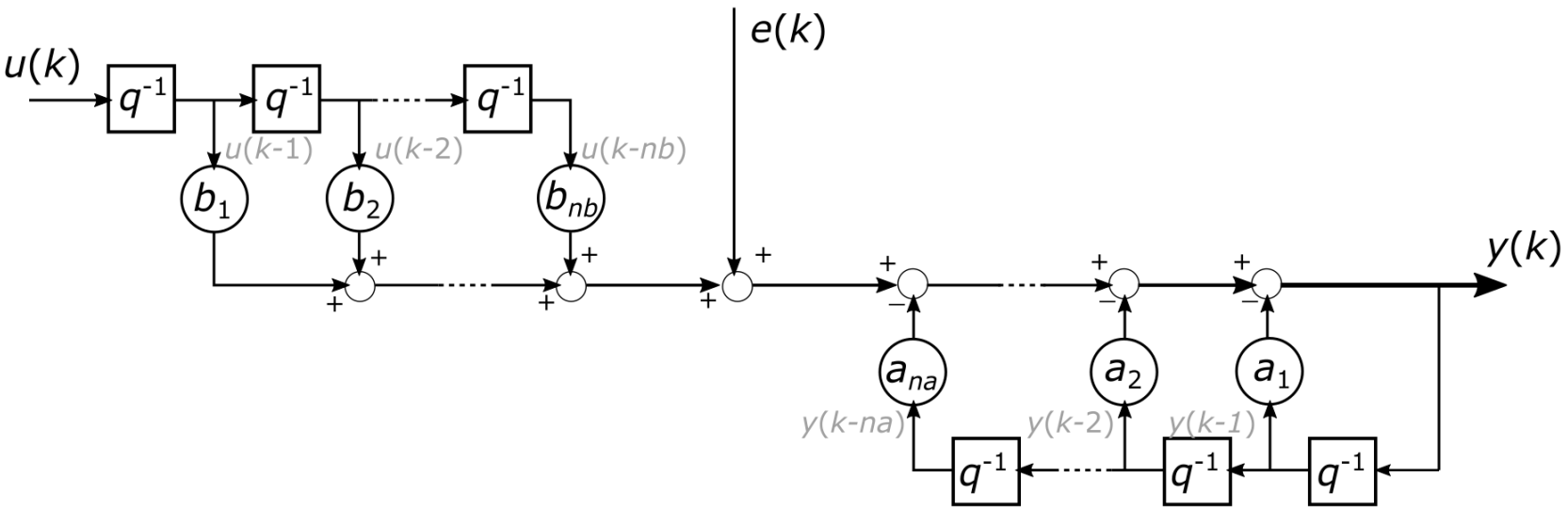


ARX: Formă explicită şi diagramă detaliată

În formă explicită:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \ldots - a_{na} y(k-na)$$
$$b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \ldots + b_{nb} u(k-nb) + e(k)$$

unde parametrii modelului sunt: $a_1, a_2, \ldots, a_{n_a}$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_{nb}$.



Reprezentare pentru regresie liniară

$$\begin{aligned} y(k) &= \begin{bmatrix} -y(k-1) & \cdots & -y(k-na) & u(k-1) & \cdots & u(k-nb) \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{na} & b_1 & \cdots & b_{nb} \end{bmatrix}^\top + e(k) \\ &=: \varphi^\top(k)\theta + e(k) \end{aligned}$$

Vector de regresori: $\varphi \in \mathbb{R}^{na+nb}$, valori precedente ale ieşirii şi intrării.

Vector de parametri: $\theta \in \mathbb{R}^{na+nb}$, coeficienţii.

Problema de identificare şi soluţia

Dat fiind un set de date $u(k), y(k)$, $k = 1, \ldots, N$, trebuie găsit vectorul θ care obţine erori $\varepsilon(k)$ minime în ecuaţia:

$$y(k) = \varphi^\top(k)\theta + \varepsilon(k)$$

Obiectiv matematic: minimizarea erorii medii pătratice:

$$V(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(k)^2$$

Soluţia: poate fi scrisă în mai multe feluri, aici vom folosi:

$$\widehat{\theta} = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^\top(k)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)y(k)\right]$$

Erorile parametrilor

Reamintim că pentru garanţii, trebuie să existe un vector corect de parametri θ_0 astfel încât:

$$y(k) = \varphi^\top(k)\theta_0 + v(k)$$

Analizăm erorile din valorile parametrilor (un vector de n elemente):

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta} - \theta_0 = & \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^\top(k)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)y(k)\right] \\
& - \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^\top(k)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^\top(k)\right]\theta_0 \\
= & \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^\top(k)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)[y(k) - \varphi^\top(k)\theta_0]\right] \\
= & \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^\top(k)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)v(k)\right]
\end{aligned}$$

Condiţii de consistenţă

Dorim ca algoritmul să fie consistent: erorile parametrilor trebuie să devină 0 la limită (şi să fie bine definite), când numărul de date tinde la infinit.

Când $N \to \infty$:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^{\top}(k) \to \mathrm{E}\left\{\varphi(k)\varphi^{\top}(k)\right\}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)v(k) \to \mathrm{E}\left\{\varphi(k)v(k)\right\}$$

Pentru ca eroarea să fie (1) bine definită şi (2) egală cu zero, trebuie ca:

1. $\mathrm{E}\left\{\varphi(k)\varphi^{\top}(k)\right\}$ inversabilă.
2. $\mathrm{E}\left\{\varphi(k)v(k)\right\}$ zero.

Motivare: ARX necesită zgomot alb

- Avem $\mathrm{E}\{\varphi(k)v(k)\} = 0$ dacă elementele $\varphi(k)$ sunt necorelate cu $v(k)$ (presupunem că $v(k)$ este de medie zero).
- Dar $\varphi(k)$ include $y(k-1), y(k-2), \ldots$, care depind de $v(k-1), v(k-2), \ldots$!
- Deci singura alternativă: $v(k)$ necorelat cu $v(k-1), v(k-2), \ldots$
  $\Rightarrow$ $v(k)$ trebuie să fie *zgomot alb*.

Variabilele instrumentale elimină această necesitate de zgomot alb.

Conţinut

1. Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
   - Punct de start: ARX
   - Metoda variabilelor instrumentale
   - Comparaţie: VI versus MEP
2. Exemplu Matlab
3. Garanţii de performanţă
4. Identificarea în buclă închisă folosind VI
5. Buclă închisă: Exemplu Matlab

Intuiţie

$$\widehat{\theta} - \theta_0 = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)\varphi^{\top}(k)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)v(k)\right]$$

Idee: Ce ar fi să includem un alt vector decât $\varphi(k)$ în produsul cu $v(k)$?

$$\widehat{\theta} - \theta_0 = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}Z(k)\varphi^{\top}(k)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}Z(k)v(k)\right]$$

unde elementele lui $Z(k)$ sunt necorelate cu $v(k)$. Atunci $\mathrm{E}\{Z(k)v(k)\} = 0$ şi eroarea poate fi zero.

Vectorul $Z(k)$ are n elemente, numite instrumente.

Metoda variabilelor instrumentale

Pentru a avea:

$$\widehat{\theta} - \theta_0 = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)\varphi^{\top}(k)\right]^{-1} \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)v(k)\right] \tag{8.1}$$

parametrii estimaţi trebuie să fie:

$$\widehat{\theta} = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)\varphi^{\top}(k)\right]^{-1} \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)y(k)\right] \tag{8.2}$$

Acest vector $\widehat{\theta}$ este soluţia sistemului de n ecuaţii:

$$\boxed{\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)\varphi^{\top}(k)\right]\theta = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)y(k)\right]} \tag{8.3}$$

Construcţia şi rezolvarea acestui sistem duce la metoda de bază a variabilelor instrumentale (VI).

Metoda variabilelor instrumentale: Formă alternativă

Formă alternativă a sistemului de ecuaţii:

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)[\varphi^{\top}(k)\theta - y(k)]\right] = 0 \qquad (8.4)$$

Exerciţiu: Arătaţi că sistemul (8.3) este echivalent cu (8.4), că oricare dintre cele două forme implică (8.2), şi că la rândul ei (8.2) implică (8.1).

VI simple

Până acum nu am discutat încă VI $Z(k)$. Ele sunt create de obicei folosind intrările (fiindcă includerea ieşirilor ar duce la corelare cu v şi ar elimina avantajul metodei VI).

O posibilitate simplă: includem intrări precedente adiţionale până obţinem un vector de dimensiunea corectă, $n = na + nb$:

$$Z(k) = [u(k - nb - 1), \ldots u(k - na - nb), u(k - 1), \ldots, u(k - nb)]^\top$$

În comparaţie cu vectorul original:

$$\varphi(k) = [-y(k - 1), \ldots, -y(k - na), u(k - 1), \ldots, u(k - nb)]^\top$$

Întrebare: De ce nu includem $u(k - 1), \ldots, u(k - na)$?

Generalizare

Luăm *na* valori anterioare ale unei variabile instrumentale x arbitrare:

$$Z(k) = [-x(k-1), \ldots, -x(k-na), u(k-1), \ldots, u(k-nb)]^\top$$

preluate de la ieşirea unei funcţii de transfer cu intrarea u:

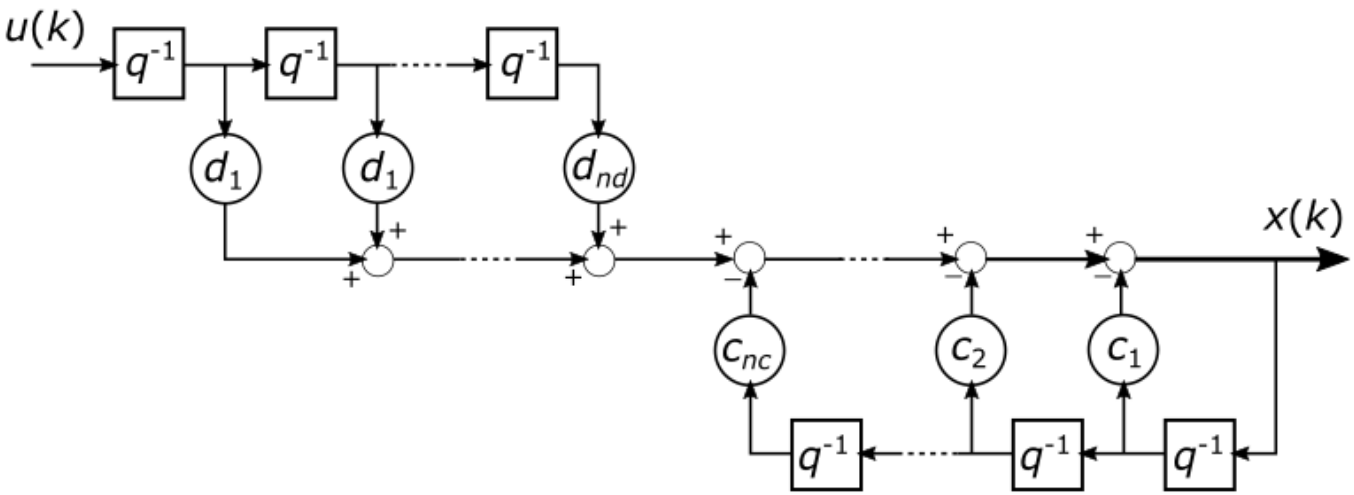
$$C(q^{-1})x(k) = D(q^{-1})u(k)$$

Observaţie: $C(q^{-1})$, $D(q^{-1})$ au semnificaţie diferită de cea din MEP.

ARX: Formă explicită şi diagramă detaliată

Formă explicită:

$$(1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{nb} q^{-nc}) x(k) =$$
$$(d_1 q^{-1} + \cdots + d_{nd} q^{-nd}) u(k)$$
$$x(k) = - c_1 x(k-1) - c_2 x(k-2) - \ldots - c_{nc} x(k-nc)$$
$$d_1 u(k-1) + d_2 u(k-2) + \ldots + d_{nd} u(k-nd)$$



VI simple = caz special al VI generalizate

Pentru a obţine:

$$Z(k) = [u(k - nb - 1), \ldots u(k - na - nb), u(k - 1), \ldots, u(k - nb)]^\top$$

alegem $C = 1$, $D = -q^{-nb}$.

Exerciţiu: Verificaţi că VI dorite sunt într-adevăr obţinute.

VI generalizate: Model iniţial

VI generalizate:

$$Z(k) = [-x(k-1), \ldots, -x(k-na), u(k-1), u(k-2), \ldots, u(k-nb)]^\top$$

În comparaţie cu vectorul original:

$$\varphi(k) = [-y(k-1), \ldots, -y(k-na), u(k-1), \ldots, u(k-nb)]^\top$$

Idee: Luăm funcţia de transfer generatoare a VI egală cu un model iniţial, $C(q^{-1}) = \widehat{A}(q^{-1})$, $D(q^{-1}) = \widehat{B}(q^{-1})$. Acest model poate proveni de ex. dintr-o identificare ARX.

VI sunt o aproximare a ieşirii y:

$$Z(k) = [-\hat{y}(k-1), \ldots - \hat{y}(k-na), u(k-1), \ldots, u(k-nb)]^\top$$

dar care este *necorelată* cu zgomotul. Important: $\hat{y}$ este ieşirea *simulată* a modelului!

Rezumat al metodei VI

Metoda IV

1: **for** fiecare pas $k = 1, 2, \ldots, N$ **do**
2: formează vectorul de regresori:
$\varphi(k) = [-y(k-1), \cdots, -y(k-na), u(k-1), \cdots, u(k-nb)]^\top$
3: formează vectorul de VI:
$Z(k) = [-x(k-1), \cdots, -x(k-na), u(k-1), \cdots, u(k-nb)]^\top$
4: simulează generatorul VI:
$x(k) = Z^\top(k)[c_1, \cdots, c_{nc}, d_1, \cdots, d_{nd}]^\top$
5: **end for**
6: găseşte $\tilde{\Phi} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)\varphi^\top(k)$, o matrice $(na+nb) \times (na+nb)$
7: găseşte $\tilde{Y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)y(k)$, un vector $na+nb$
8: rezolvă $\tilde{\Phi}\theta = \tilde{Y}$
9: **return** $\theta = [a_1, \ldots, a_{na}, b_1, \ldots, b_{nb}]^\top$

Semnalele la paşi k zero şi negativi sunt 0, ca de obicei.

Conţinut

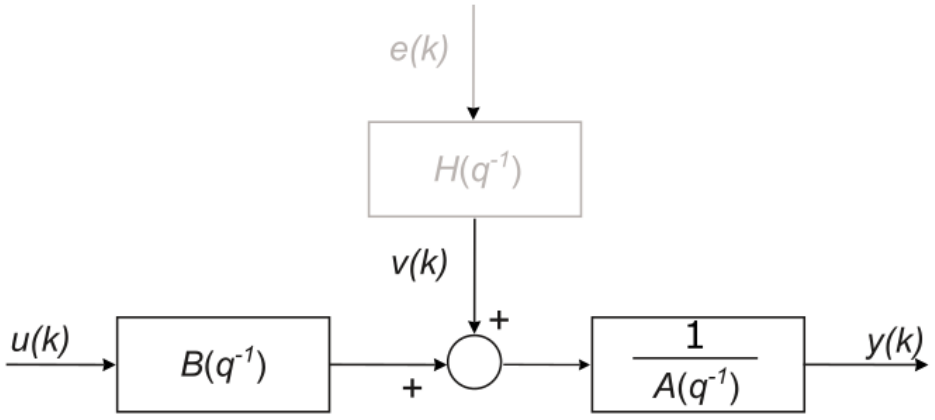
1. Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
   - Punct de start: ARX
   - Metoda variabilelor instrumentale
   - Comparaţie: VI versus MEP
2. Exemplu Matlab
3. Garanţii de performanţă
4. Identificarea în buclă închisă folosind VI
5. Buclă închisă: Exemplu Matlab

Comparaţie

Atât metoda MEP cât şi cea VI sunt extensii ale metodei ARX:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

la perturbaţii $v(k)$ diferite de zgomot alb $e(k)$.



- Metoda MEP include explicit modelul perturbaţiei în structură, de ex. în ARMAX $v(k) = C(q^{-1})e(k)$, ducând la $A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$.
- Metoda IV *nu* modelează perturbaţia explicit, dar este proiectată pentru a fi robustă la perturbaţii care nu sunt zgomot alb – perturbaţii “colorate”, folosind variabile instrumentale $Z(k)$ necorelate cu aceste perturbaţii.

Comparaţie (continuare)

Avantaj VI: Structură de model simplă, identificarea constă din rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare. În contrast, MEP necesită rezolvarea unei probleme de optimizare mai complicate (de ex. cu metoda Newton), vulnerabilă la minime locale, etc.

Dezavantaj VI: (motivul pentru care am răspuns “da” rezervat la început) În practică, pentru un număr finit N de date, calitatea modelului depinde mult de VI alese $Z(k)$. În plus, modelul rezultant are un risc mai mare de a fi instabil (chiar dacă sistemul real este stabil).

Există şi metode de a alege VI $Z(k)$ optime într-un anumit sens matematic, dar nu le vom discuta aici.

Conţinut

1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale

2 Exemplu Matlab

3 Garanţii de performanţă

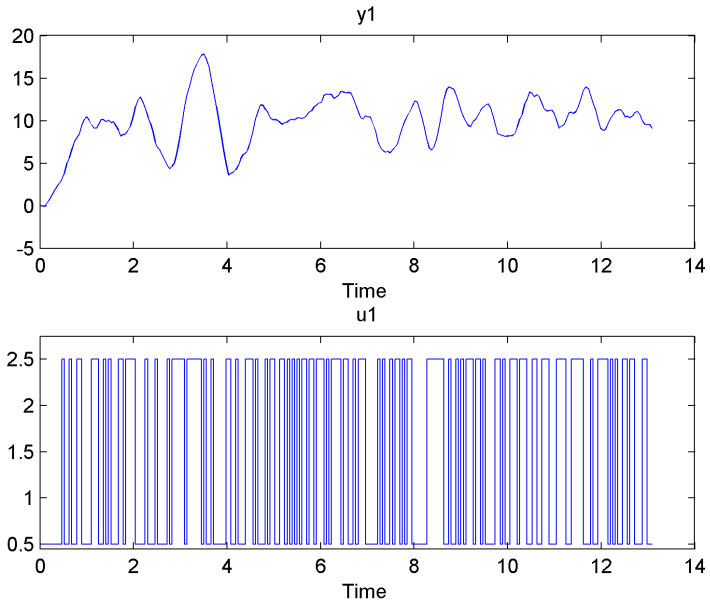
4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

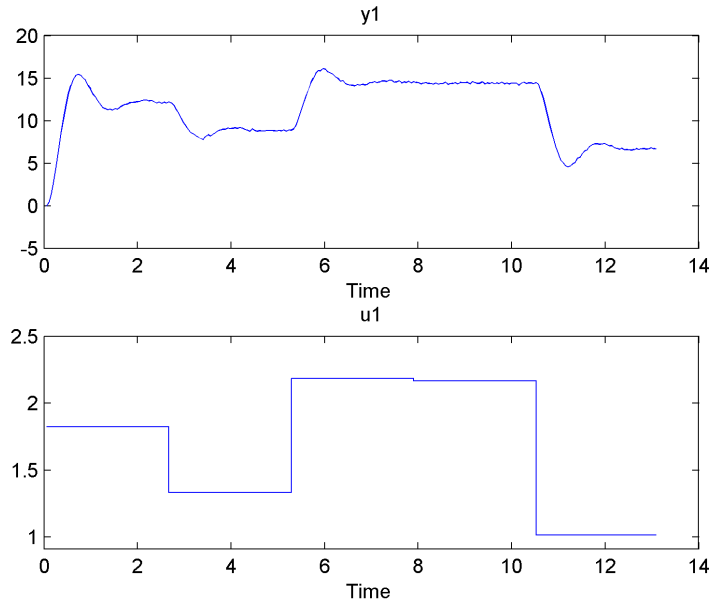
5 Buclă închisă: Exemplu Matlab

Date experimentale

Seturi de date separate de identificare şi validare:

`plot(id);` and `plot(val);`





Se ştie în avans că sistemul are ordinul 2 şi că perturbaţia este colorată (nu satisface structura ARX).

Observaţii: Intrarea de identificare este un SPAB, iar intrarea de validare este o secvenţă de trepte.

Identificare cu generator arbitrar de VI

Definim VI prin funcţia de transfer generatoare, folosind polinoame $C(q^{-1})$ şi $D(q^{-1})$.

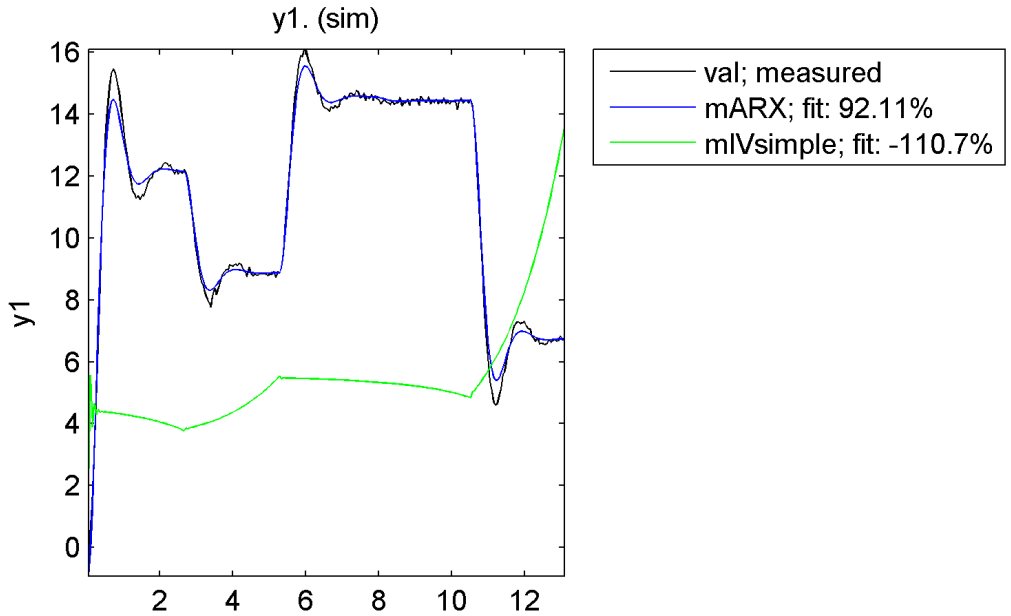
```
model = iv(id, [na, nb, nk], C, D);
```

Argumente:

1. Datele de identificare.
2. Vector conţinând gradele polinoamelor A şi B şi întârzierea nk (ca pentru ARX).
3. Polinoamele C şi D, reprezentate ca vectori de coeficienţi în ordinea *crescătoare* a puterilor lui q^{-1}.

Rezultat cu VI simple

Luăm $C(q^{-1}) = 1$, $D(q^{-1}) = -q^{-nb}$, ducând la
$Z(k) = [u(k - nb - 1), \ldots u(k - na - nb), u(k - 1), \ldots, u(k - nb)]^\top$.
Comparăm cu ARX.

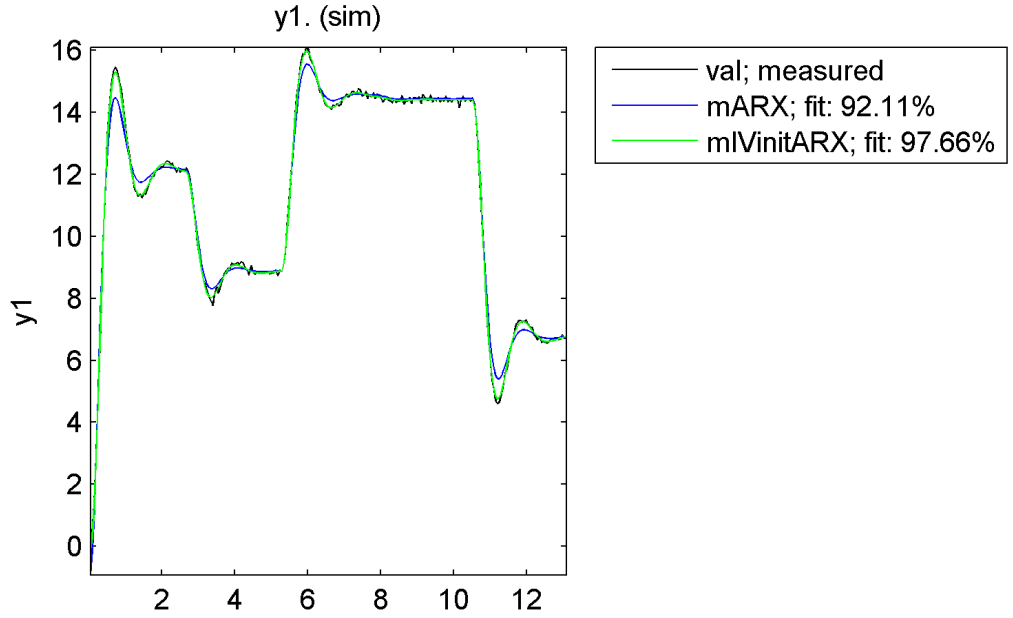


Concluzii:

- Model instabil, $\Rightarrow$ VI trebuie aplicate cu atenţie fiindcă modelele nu sunt întotdeauna stabile! (reamintim comparaţia cu MEP)
- Rezultatele sunt foarte proaste cu această alegere simplă de VI.

Rezultat cu VI din modelul ARX

$C(q^{-1}) = \hat{A}(q^{-1})$, $D(q^{-1}) = \hat{B}(q^{-1})$ din ARX, ducând la $Z(k) = [-\hat{y}(k-1), \ldots - \hat{y}(k-na), u(k-1), \ldots, u(k-nb)]^\top$.

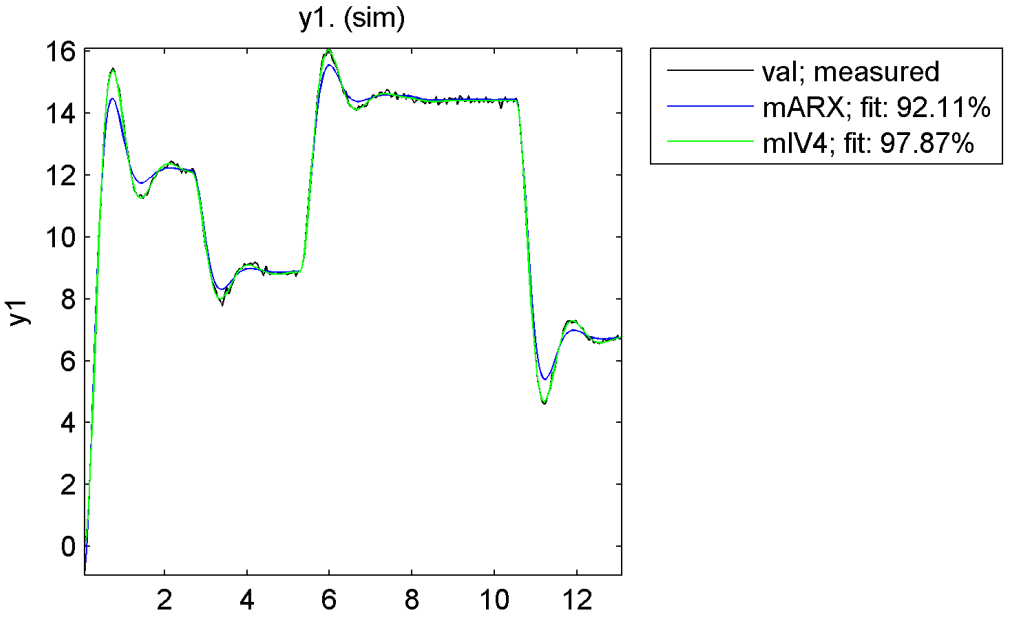


Concluzii: VI obţine rezultate bune, în particular mai bune decât ARX. Motivul este perturbaţia colorată, care este tratată eficient de către VI (în timp ce ARX nu o poate lua în considerare – dar furnizează totuşi un punct de pornire bun pentru VI).

Rezultat cu VI automate

```
model = iv4(id, [na, nb, nk]);
```

Implementează un algoritm care generează VI aproape-optimale.



Concluzie: Performanţa este în esenţă aceeaşi cu VI din ARX.

Conţinut

1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale

2 Exemplu Matlab

3 Garanţii de performanţă

4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

5 Buclă închisă: Exemplu Matlab

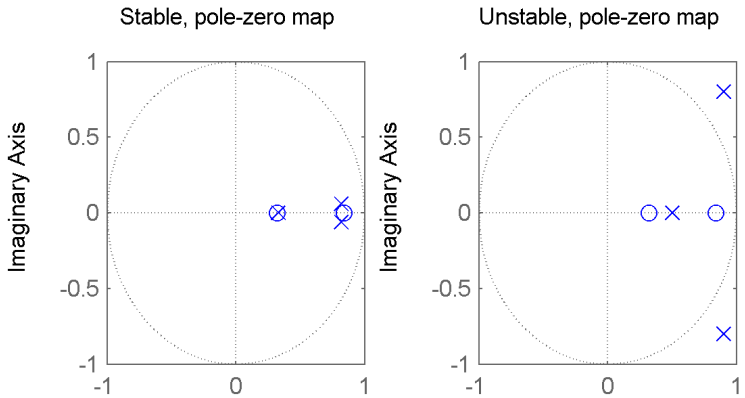
Ipoteze

Ipoteze (simplificate)

1. Perturbaţia $v(k) = H(q^{-1})e(k)$ unde $e(k)$ este zgomot alb de medie zero, iar $H(q^{-1})$ este o funcţie de transfer ce satisface anumite condiţii.
2. Semnalul de intrare $u(k)$ are un ordin de PE suficient de mare şi nu depinde de perturbaţie (experimentul este în buclă deschisă).
3. Sistemul real este stabil şi *unic* reprezentabil de către modelul ales: există un singur vector θ_0 pentru care polinoamele $A(q^{-1};\theta_0)$ şi $B(q^{-1};\theta_0)$ sunt identice cu cele ale sistemului real.
4. Matricea $\mathrm{E}\left\{Z(k)Z^{\top}(k)\right\}$ este inversabilă.

Discuţie ipoteze

- Ipoteza 1 evidenţiază principalul avantaj al VI faţă de MEP: perturbaţia poate fi colorată.
- Ipotezele 2 şi 3 nu sunt foarte diferite de cele impuse de către MEP. Pentru ca un sistem în timp discret să fie stabil, toţi polii trebuie să fie în strict în interiorul cercului de rază 1 centrat în origine:



Întrebare: De ce nu experimentul nu poate fi în buclă închisă?

- Dată fiind o intrare cu ordin de PE suficient – Ipoteza 4 se rezumă la o selecţie juidicioasă a variabilelor instrumentale (de ex. nu fără interdependenţe liniare).

Garanţie

Teorema 1

Când numărul de date $N \to \infty$, soluţia $\widehat{\theta}$ a metodei VI converge la vectorul corect de parametri θ_0.

Observaţie: Garanţie de consistenţă, la limită când numărul de date tinde la infinit.

Extensii posibile

- Sisteme cu intrări şi ieşiri multiple (MIMO).
- Vectorul Z al VI de dimensiune mai mare decât vectorul de parametri θ — cu modificări adiţionale, se numesc metodele extinse ale variabilelor instrumentale.
- Identificarea sistemelor ce funcţionează în buclă închisă

Conţinut

1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale

2 Exemplu Matlab

3 Garanţii de performanţă

4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

5 Buclă închisă: Exemplu Matlab

Motivare

În practică, sistemele trebuie adesea să fie controlate, fiindcă dacă ar funcţiona fără control, în buclă deschisă:

- Ar fi instabile
- Semnalele nu ar satisface limite impuse din motive de de siguranţă sau economice

În acest caz, $u(k)$ se calculează cu reacţie de la ieşirea $y(k)$: sistemul funcţionează în buclă închisă

Identificarea în buclă închisă

Cu toate acestea, majoritatea metodelor pe care le-am studiat presupun că sistemul funcţionează în buclă deschisă! De exemplu, garanţia metodei VI impune (printre altele):

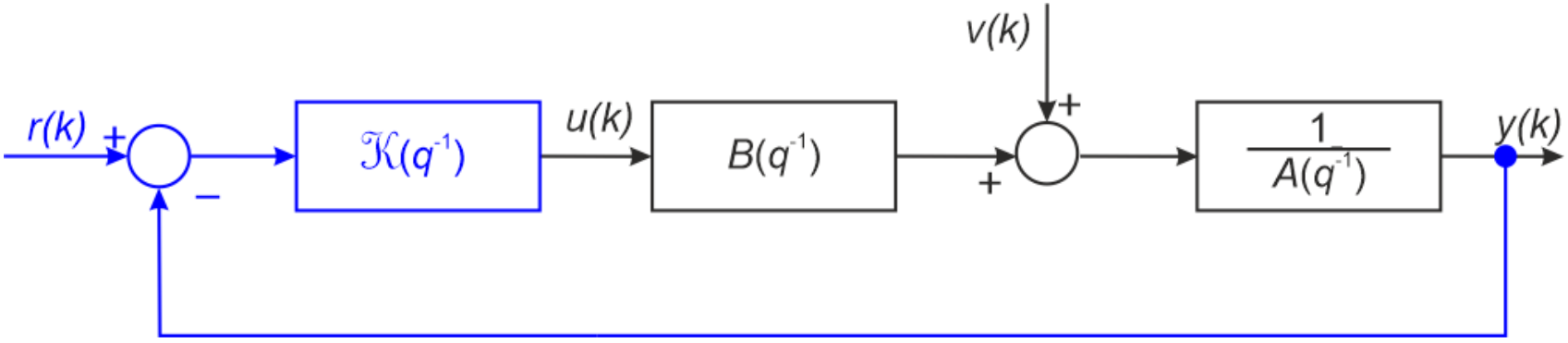
- ...
- Semnalul de intrare $u(k)$ nu depinde de perturbaţie (experimentul este în buclă deschisă).
- ...

Eliminarea acestei condiţii duce la **identificarea în buclă închisă**.

Mai multe metode pot fi modificate pentru a funcţiona în acest context, printre care metodele MEP.

Ne vom concentra aici asupra metodei VI, mai uşor de modificat.

Structura VI în buclă închisă



$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + v(k)$$
$$u(k) = \mathcal{K}(q^{-1})(r(k) - y(k))$$

unde $\mathcal{K}(q^{-1})$ este funcţia de transfer a regulatorului, iar $r(k)$ este semnalul de referinţă

Aşadar, $u(k)$ depinde dinamic atât de semnalul de referinţă cât şi de ieşirea sistemului

Dificultate

Condiţia de buclă deschisă va fi evident invalidă. Investigăm mai în profunzime problema.

Motivul fundamental pentru care am avut nevoie de bucla deschisă a fost pentru ca erorile de parametri:

$$\widehat{\theta} - \theta_0 = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)\varphi^\top(k)\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Z(k)v(k)\right]$$

să fie egale cu zero, ducând la un model bun. În acest scop, necesităm:

- $\mathrm{E}\{Z(k)v(k)\}$ zero.
- $\mathrm{E}\left\{Z(k)\varphi^\top(k)\right\}$ inversabilă.

Cu alegerile uzuale de VI, calculate pe baza intrării u (care acum depinde de y şi aşadar de v), prima condiţie este invalidată.

VI în buclă închisă: idee

Vectorul de VI $Z(k)$ nu mai are voie să depindă de $u(k)$.

Idee: **construim $Z(k)$ în funcţie de $r(k)$**!

Atunci:

- $\mathrm{E}\{Z(k)v(k)\}$ va fi zero în mod natural, fiindcă noi generăm referinţa r, independent de perturbaţia v
- Matricea $\mathrm{E}\left\{Z(k)\varphi^{\top}(k)\right\}$ devine inversabilă dacă ne asigurăm că VI sunt bine alese (de ex. fără dependenţe liniare), şi că referinţa r are un ordin de PE suficient de mare

Exemple de alegeri pentru VI

Cea mai simplă idee – includem în Z numărul corect de valori precedente ale referinţei:

$$Z(k) = [r(k-1), r(k-2), \ldots r(k-na-nb)]^\top$$

Generalizare la combinaţii liniare de aceste valori:

$$Z(k) = F \cdot [r(k-1), r(k-2), \ldots r(k-na-nb)]^\top$$

unde F este inversabilă. Cazul simplu este recuperat alegând F matricea identitate.

Table of contents

1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale

2 Exemplu Matlab

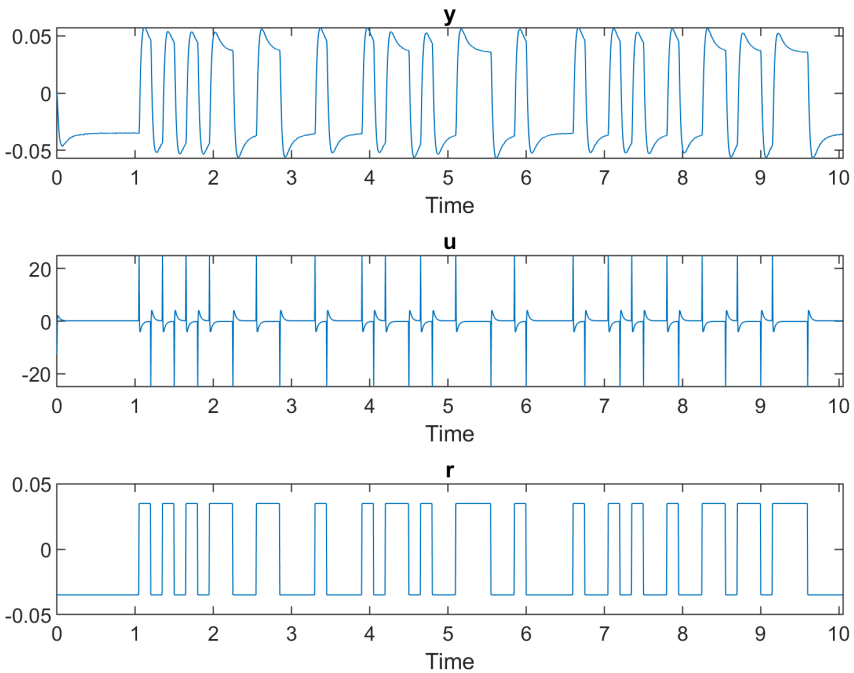
3 Garanţii de performanţă

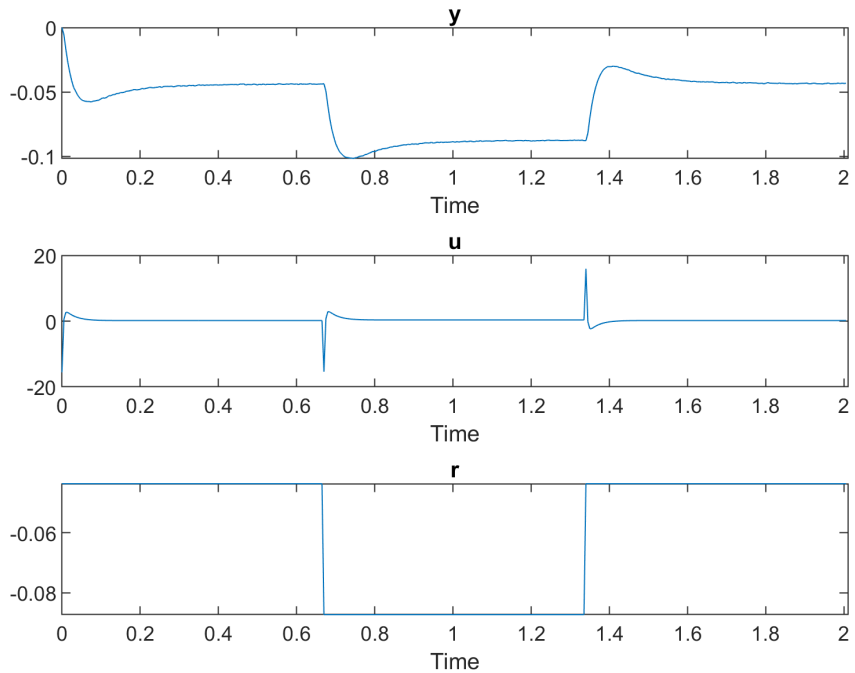
4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

5 Buclă închisă: Exemplu Matlab

Date experimentale

Identificare în stânga, validare în dreapta:

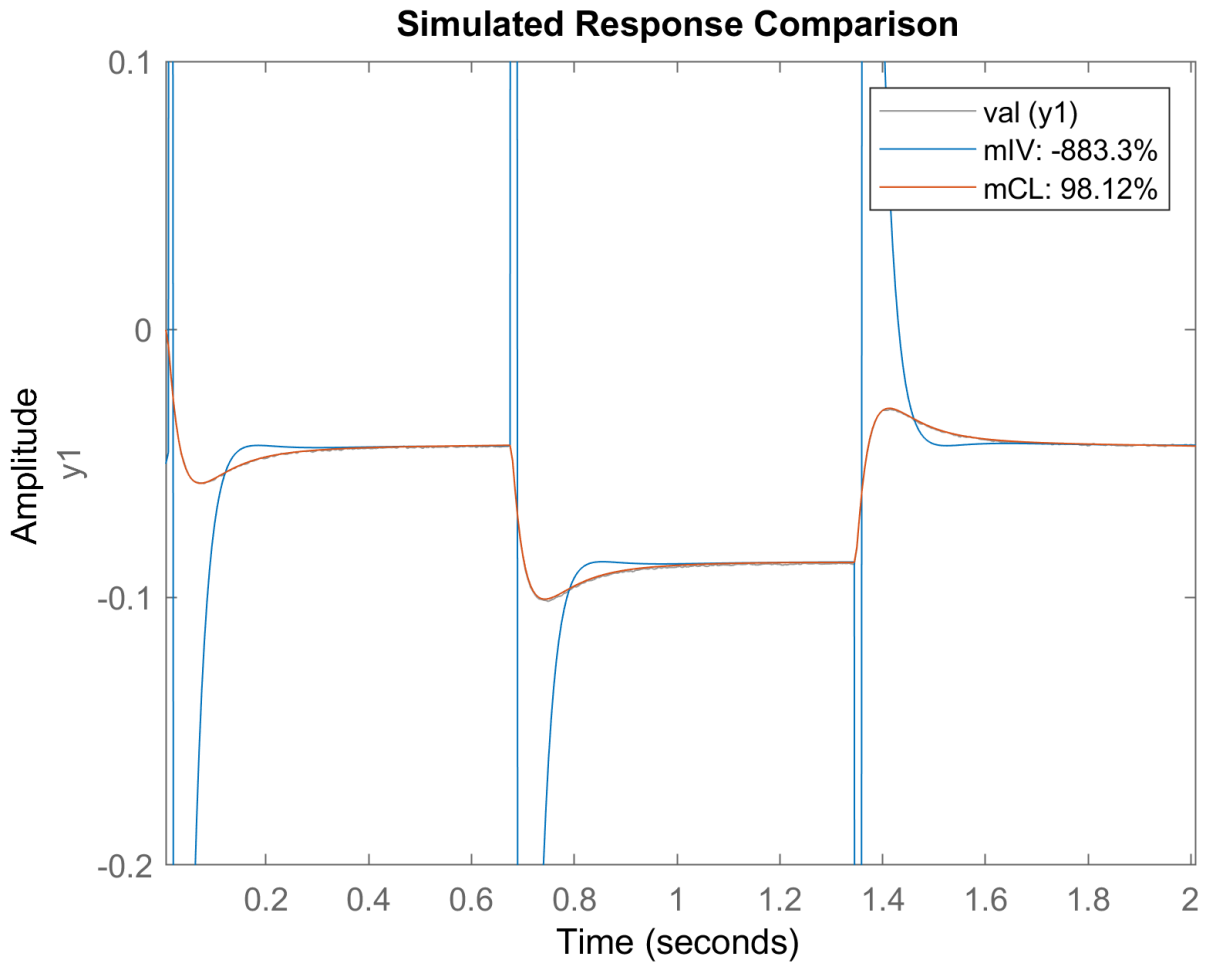




Ca şi în exemplul cu buclă deschisă, sistemul are ordinul 2 şi perturbaţia este colorată (nu se supune formei ARX).

Diferenţa este că acum intrarea este generată de un regulator pe baza semnalului de referinţă *r*, care este un SPAB.

Rezultate



- Metoda VI cu instrumente ARX: eşuează.
- Metoda VI în buclă închisă folosind *r* pentru generarea instrumentelor: funcţionează.

Rezumat

- Obiectiv: combinarea simplităţii regresiei liniare din ARX cu generalitatea perturbaţiei v din MEP
- Investigaţie în motivul pentru care ARX eşuează când v este colorat
- Soluţie: înlocuirea regresorilor φ (în locuri bine alese din ecuaţii) cu *variabilele instrumentale* Z care nu depind de y
- Câteva metode de a calcula Z doar din u
- Calitatea soluţiei depinde mult de Z, poate fi chiar instabilă

- Exemplu Matlab

- Generalizarea adiţională a lui Z ca să depindă doar de referinţa r permite aplicarea metodei VI în buclă închisă
- Exemplu Matlab pentru identificarea în buclă închisă