

Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu



Partea III

Analiza răspunsurilor la treaptă și impuls

Motivare

În general:

În anumite cazuri un model simplu de ordinul 1 sau 2 este suficient; analiza răspunsurilor la treaptă și impuls este o metodă ușoară de a obține astfel de modele.

Pentru studenți:

Metoda cea mai apropiată de cunoștințele de la teoria sistemelor
⇒ o tranziție mai ușoară către alte metode.

Clasificare

Reamintim **Taxonomia modelelor matematice** din Partea I:

După numărul de parametri:

- ① **Modele parametrice**: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut și de obicei mic de parametri
- ② **Modele neparametrice**: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri
Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoștințele disponibile în avans (“culoare”):

- ① Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
- ② Modele cutie neagră: complet necunoscute în avans
- ③ **Modele cutie gri**: parțial cunoscute

Clasificare (continuare)

La pașii la care studiem graficul în sine, răspunsurile la treaptă și impuls pot fi interpretate ca **modele neparametrice**: sunt funcții de timp continuu care, în general, nu pot fi reprezentate printr-un număr finit de parametri.

Pe baza graficului însă, vom determina în final o funcție de transfer – un **model parametric**.

Model de tip **cutie gri**.

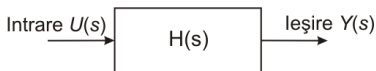
Studiul răspunsurilor la treaptă și impuls se numește *analiza în domeniul timp*.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Omogeneitate: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u(t)$ cu ieșirea $y(t)$; atunci la $\alpha u(t)$ va răspunde cu $\alpha y(t)$.

Reprezentarea prin funcții de transfer



Funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad m \leq n$$

unde $U(s)$ și $Y(s)$ sunt, respectiv, transformatele Laplace ale semnalelor de intrare și ieșire în domeniul timp $u(t)$, $y(t)$.
(Important: în condiții inițiale nule.)

Transformata Laplace a unui semnal $f(t)$ este:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Transformata Laplace: discuție

- s se numește argument *complex* (este un număr complex), iar transformata Laplace efectuează trecerea a unei funcții din domeniul timp t în domeniul complex s .
- Avantajul este că multe operații aplicate uzual în inginerie (derivare, integrare etc.) devin mult mai simple în domeniul s .

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
 - Sisteme de ordinul 1
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Sistem de ordinul 1: Exemplu

Sistemele de ordinul 1 sunt frecvent întâlnite. Exemplu tipic: un sistem termic.

Considerăm un obiect la temperatura θ_1 (variabila de ieșire) plasat într-un mediu la temperatura θ_2 (variabila de intrare). Avem:

$$C\dot{\theta}_1(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{R}$$

unde C este inerția termică și R este rezistența termică.

Aplicăm transformata Laplace de ambele părți ale ecuației:

$$Cs\Theta_1(s) = \frac{\Theta_2(s) - \Theta_1(s)}{R}$$

obținând funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{\Theta_1(s)}{\Theta_2(s)} = \frac{1}{CRs + 1}$$

- K este factorul de proporționalitate (= 1 în exemplu)
- T este constanta de timp (= CR în exemplu)

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 **Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - **Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor**
 - Exemplu
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Semnalul treaptă ideal



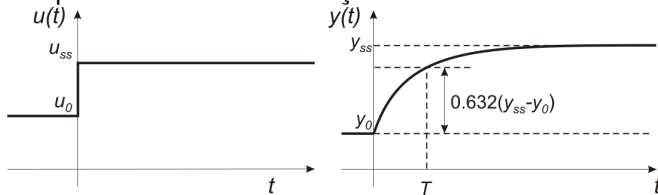
$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- 1 Citește ieșirea în regim staționar. Factorul de proporționalitate K este egal cu această ieșire.
- 2 Găsește valoarea timpului la care ieșirea atinge 0.632 din valoarea staționară. Aceasta este constanta de timp T .

Condiții inițiale nenule

În practică, adeseori semnalul treaptă ideal nu poate fi folosit, fiindcă sistemul trebuie menținut în jurul unui punct de funcționare sigur/profitabil. Vom presupune că înaintea experimentului sistemul era în regim staționar la ieșirea y_0 cu intrarea constantă u_0 .

Realizarea practică a treptei este adesea un semnal rectangular ca în figură. Răspunsul sistemului este aşadar non-ideal.



Dar sistemul este liniar! Noua intrare este $u(t) = u_0 + (u_{ss} - u_0)u_S(t)$ unde $u_S(t)$ este treapta ideală. Așadar, dacă notăm răspunsul la treaptă ideal cu $y_S(t)$, avem noua ieșire:

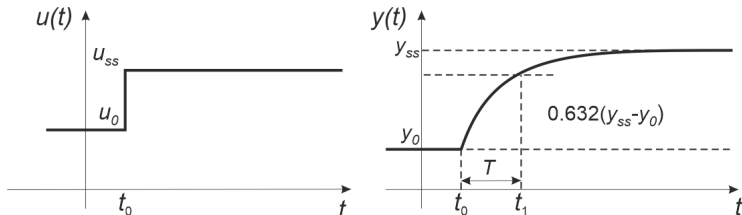
$$y(t) = y_0 + (u_{ss} - u_0)y_S(t)$$

adică o simplă translatăre și scalare a semnalului ideal.

$$y_{ss} = y_0 + (u_{ss} - u_0)K$$

$$y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0)$$

Algoritm general

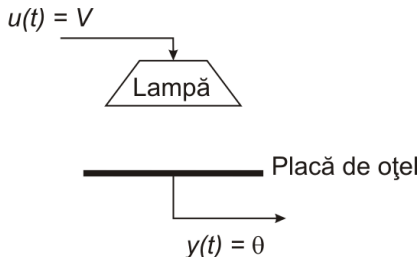


Algoritm general

- 1 Citește u_0 , y_0 , u_{ss} , y_{ss} , valorile inițiale și în regim staționar ale intrării și ieșirii. Calculează $K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0}$.
- 2 Citește timpul t_0 unde are loc treapta, și t_1 unde ieșirea urcă la 0.632 din diferență. Calculează $T = t_1 - t_0$.

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 **Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu: Sistem termic



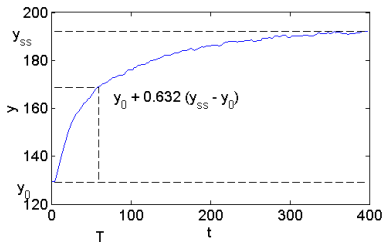
Considerăm sistemul termic din figură (diferit de exemplul anterior). Intrarea este voltajul V aplicat lămpii, iar ieșirea este temperatura θ citită de un termocuplu montat pe spatele plăcii de oțel.

Perioada de eşantionare

Definiție: Perioada de eşantionare T_s este intervalul de timp continuu dintre două momente succesive de eşantionare (a semnalelor de intrare, de ieşire sau a altor semnale din sistem).

Nu confundați perioada de eşantionare T_s cu constanta de timp T înmulțită cu argumentul complex s !

Sistem termic: Model și parametri



Avem $y_{ss} \approx 192^\circ \text{C}$, $y_0 \approx 129^\circ \text{C}$. Intrarea $u_{ss} = 9 \text{ V}$ și știm din experiment că intrarea inițială $u_0 = 6 \text{ V}$. Așadar:

$$K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0} \approx \frac{192 - 129}{9 - 6} \approx 21$$

Mai departe, $y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0) \approx 169$, și identificând acest punct pe grafic obținem $T \approx 60$.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Sistem de ordinul 2: Exemplu

Sistemele de ordinul 2 sunt și ele adeseori întânite.



Considerăm o masă m atașată unui arc, căreia îi aplicăm o forță f (intrarea) în direcția opusă arcului. Măsurăm poziția x a masei relativ la poziția de repaus a arcului (ieșirea). Din legea a doua a lui Newton:

$$m\ddot{x}(t) = f(t) - kx(t)$$

unde k este constanta elastică a arcului.

Aplicând transformata Laplace de ambele părți:

$$ms^2X(s) = F(s) - kX(s)$$

ducând la funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

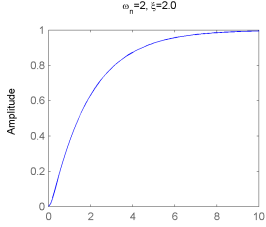
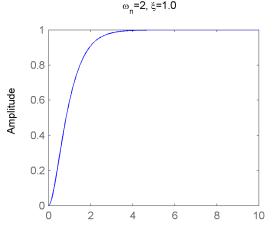
Sistem de ordinul 2: Forma generală

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

unde:

- K este factorul de proporționalitate ($= \frac{1}{k}$ în exemplu)
- ξ este factorul de amortizare ($= 0$ în exemplu)
- ω_n este pulsația naturală ($= \sqrt{k/m}$ în exemplu)

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 **Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - **Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor**
 - Exemplu
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2



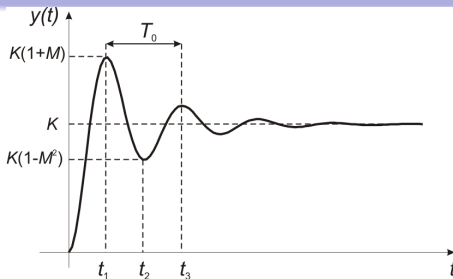
Răspuns la treaptă de ordinul 2 subamortizat

Ne ocupăm în principal de cazul subamortizat, $\xi \in (0, 1)$



Rezolvând pentru $y(t)$ obținem:

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \arccos \xi) \right]$$



Valoarea staționară: $\lim_{t \rightarrow \infty} K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\dots) \right] = K$

Aflăm maximele și minimele fixând derivata la zero:

$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) = 0$$

$$\Rightarrow t_m = \frac{m\pi}{\omega_p \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad m \geq 0$$

$$y(t_m) = K[1 + (-1)^{m+1} M^m], \text{ unde suprareglajul } M = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

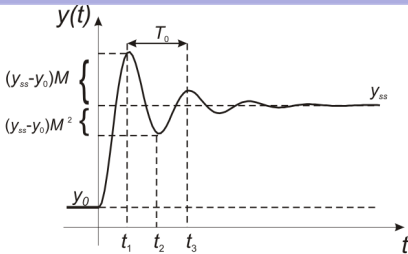
Pornirea de la răspuns la treaptă

Considerăm acum că este dat răspunsul unui sistem necunoscut.



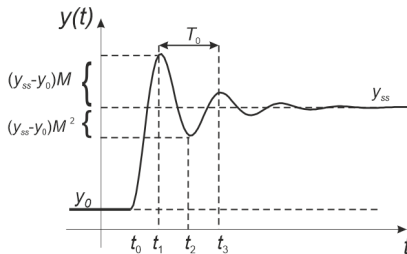
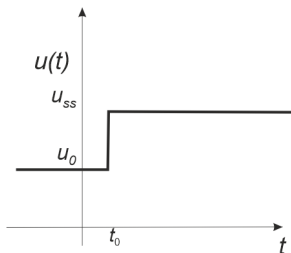
Folosind elementele de mai sus, vom afla o funcție de transfer aproximată a sistemului.

9



- $$M = \frac{y_{ss} - y(t_2)}{y(t_1) - y_{ss}} \text{ (nici o schimbare aici).}$$

ξ, T_0 : la fel ca înainte.



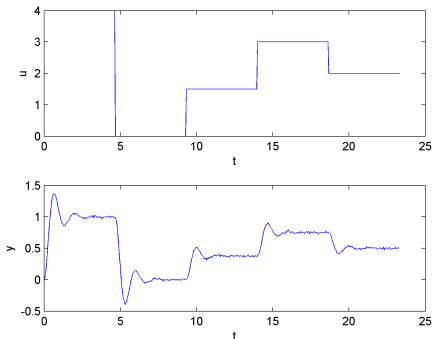
Ca și pentru ordinul 1, translatăm axa orizontală cu timpul de start t_0 al treptei. Nu există nici un impact asupra algoritmului, fiindcă se folosesc oricum timpi relativi pentru calculul perioadei de oscilație.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 **Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu de ordinul 2

Datele sunt generate în simulare, 500 de eșantioane cu perioada de eșantionare ≈ 0.047 .



De notat din nou zgomotul. De asemenea, condițiile inițiale sunt nule ($u_0 = y_0 = 0$) dar treptele au valori nonstandard, diferite de 1.

Folosim prima treaptă pentru identificare, și treptele 3–5 pentru validare, (treapta 2 readuce sistemul în condiții nule).

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}} \approx 5.05.$$

Exemplu: Modelul ca funcție de transfer

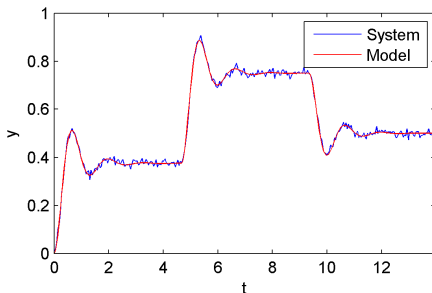
$$\hat{K} = 0.25$$

$$\hat{\xi} = 0.31$$

$$\hat{\omega}_n = 5.05$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}\hat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} = \frac{6.38}{s^2 + 3.09s + 25.51}$$

Exemplu: Validare



Calitatea modelului este foarte bună (ceea ce nu este surprinzător, datele fiind generate în simulare).

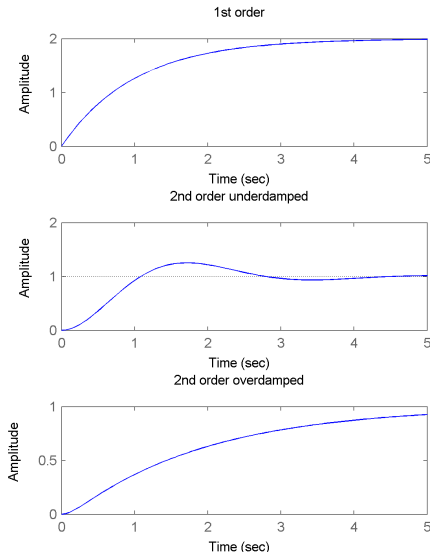
Eroarea medie pătratică (MSE):

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - y(k))^2 \approx 9.66 \cdot 10^{-5}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale**
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

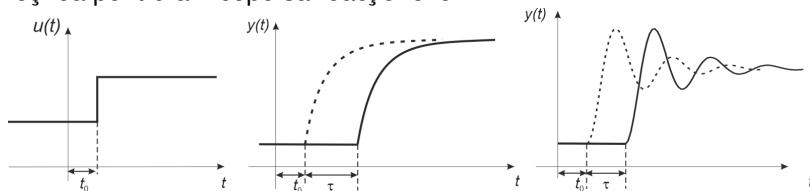
Alegerea ordinului



Chiar dacă este critic sau supraamortizat, la $t = 0$ răspunsul unui sistem de ordinul 2 va avea derivata egală cu 0: va fi **tangent la axa timpului**. În schimb, panta tangentei este de K/T pentru sistemele de ordinul 1.

Timp mort

Răspunsul unui sistem de ordinul 1 sau 2 **cu timp mort τ** are aceeași formă ca și mai sus, dar după ce intrarea se schimbă, există o întârziere τ înainte ca efectul să se propage la ieșire. A nu se confunda cu timpul potențial nenul t_0 de aplicare a semnalului treaptă! Timpul mort τ este intervalul de *după* t_0 de care are nevoie ieșirea pentru a începe să reacționeze.



Timpul mort este reprezentat în funcția de transfer după cum urmează:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-s\tau}, \quad H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-s\tau}$$

Valoarea lui τ se citește direct pe grafic.

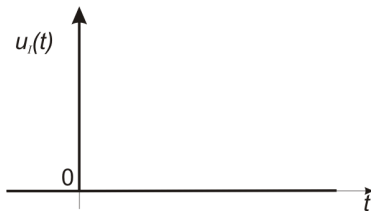
Rezumat răspuns la treaptă

- Factor de proporționalitate K : diferența dintre nivelurile la ieșire / diferența dintre nivelurile la intrare.
- Ordin 1: constanta de timp T găsită pe axa *timp* când axa *ieșire* atinge 63.2% din diferență.
- Ordin 2: perioada T_0 citită pe grafic, suprareglajul M calculat din maxime și minime. Rezultă ξ, ω_n .
- Inspecție grafic + eroare medie pătratică utilizată pentru validarea modelelor.
- Mediere eșantioane pentru zgomot în valorile inițiale / staționare.
- Timpul inițial diferit de zero și întârzierile tratate prin translatarea corespunzătoare a valorilor de timp; întârziererea intră în funcția de transfer.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1**
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Intrarea impuls ideală



Impulsul ideal este funcția delta a lui Dirac. O definiție informală:

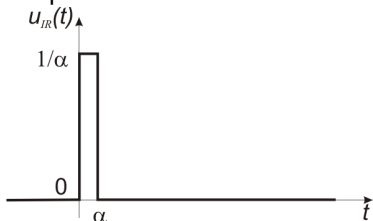
$$u_I(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

cu o condiție suplimentară: $\int_{-\infty}^{\infty} u_I(t) dt = 1$.

(De fapt, impulsul ideal nu este o funcție, ci o așa-numită distribuție.)

Realizarea practică a impulsului

În realitate, evident nu putem crea semnale de amplitudine infinită. Impulsul este așadar aproximat de către un semnal rectangular:



$$u_{IR}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & t \in [0, \alpha) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

unde $\alpha \ll$ (mult mai mic decât constantele de timp ale sistemului).

De notat că dreptunghiul are aria 1, $\int_{-\infty}^{\infty} u_{IR}(t) dt = 1$.

Această aproximare introduce diferențe (erori) față de răspunsul real la impuls, dar pentru α mic eroarea este acceptabilă. Vom dezvolta analiza în cazul ideal, dar exemplele folosesc realizarea practică.

O proprietate utilă a răspunsului la impuls

În domeniul complex:

$$\text{treapta } U_S(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{impulsul } U_I(s) = 1$$

Reamintim că răspunsul în domeniul timp al unui sistem se poate scrie: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, iar $Y(s) = H(s)U(s)$.

Deci:

$$\begin{aligned} Y_S(s) &= \frac{1}{s} Y_I(s), & Y_I(s) &= s Y_S(s) \\ y_S(t) &= \int_0^t y_I(\tau) d\tau, & y_I(t) &= \dot{y}_S(t) \end{aligned}$$

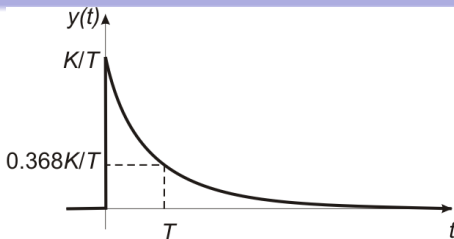
Răspunsul la impuls este *derivata răspunsului la treaptă*.

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

unde:

- K este factorul de proporționalitate
- T este constanta de timp

Răspunsul la impuls de ordinul 1 ideal



Folosind relația cu răspunsul la treaptă, și derivata acestui răspuns pe care am calculat-o deja, avem direct răspunsul la impuls:

$$y_I(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$

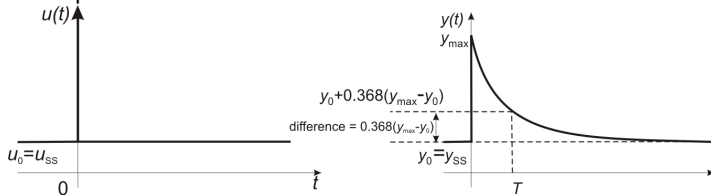
de unde rezultă:

$$\begin{cases} y_I(0) = \frac{K}{T} = y_{\max} \\ y_I(T) = \frac{K}{T} e^{-1} = y_{\max} e^{-1} \approx 0.368 y_{\max} \end{cases}$$

De notat: $y_1(4T) = 0.0183y_{\max}$, ieșirea este aproximativ staționară după $4T$.

Determinarea parametrilor

Considerăm acum că este dat răspunsul la impuls al unui sistem necunoscut. Vom folosi acest răspuns pentru a găsi o funcție de transfer aproximată.

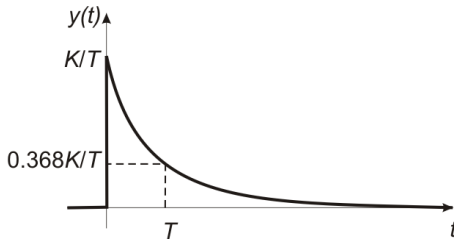


Presupunem întâi condiții inițiale nenule fiindcă sunt favorabile: oferă o metodă robustă de a estima factorul de proporționalitate K .

Algorithm

- 1 Citește ieșirea staționară (sau inițială) $y_{ss} = y_0$, la fel și intrarea $u_{ss} = u_0$. Apoi, $K = y_{ss}/u_{ss}$.
- 2 Citește $y_{\max}$ și citește constanta de timp T la momentul în care ieșirea descrește la 0.368 din diferența $y_{\max} - y_0$.

Determinarea parametrilor în condiții inițiale nule



Putem estima factorul de proporționalitate folosind $y_{\max} = \frac{K}{T}$, dar în practică această metodă nu este la fel de precisă, datorită zgomotului și a caracterului non-ideal al impulsului.

Algorithm

- 1 Citește $y_{\max}$ și determină timpul la care ieșirea descrește la 0.368 din $y_{\max}$. Aceasta este constanta de timp T .
- 2 Calculează $K = y_{\max} T$.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

$$u_5 = u_4 = 0.5$$

© 2006 The Authors
Journal compilation © 2006 Blackwell Publishing Ltd

Exemplu: Model și parametri (continuare)

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}}{\hat{T}s + 1} = \frac{0.25}{3.92s + 1}$$

Model în spațiul stărilor pentru un sistem de ordinul n

Un **model în spațiul stărilor**, în timp continuu, reprezintă un sistem liniar sub forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

unde:

- x este vectorul de stare, $x \in \mathbb{R}^n$ cu n ordinul sistemului
- u și y sunt intrarea și ieșirea obișnuite. Pot fi vectori dacă sistemul are mai multe intrări sau ieșiri, dar aici semnale scalare sunt suficiente.
- Matricile A de stare, B de intrare, C de ieșire, D de transfer direct. Acestea au dimensiunile potrivite, aici: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (vector datorită intrării scalare), $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (vector datorită ieșirii scalare), $D \in \mathbb{R}$ (un scalar, de obicei 0).

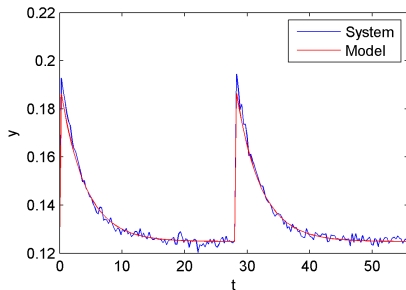
Înapoi la exemplu: Model aproximat în spațiul stărilor

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{1}{\hat{T}}x(t) + \frac{\hat{K}}{\hat{T}}u(t) = -0.26x(t) + 0.06u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

Matlab: $H_{SS} = SS(A, B, C, D)$

Exemplu: Validare din condiția inițială corectă

Pentru a lua condiția inițială în considerare, inițializăm $x(0) = y_0$ la începutul simulării.



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \approx 3.74 \cdot 10^{-6}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale

Reamintim: Sistem de ordinul 2

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

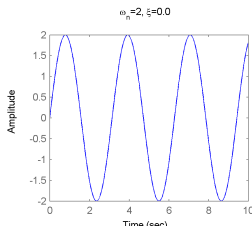
unde:

- K este factorul de proporționalitate
- ξ este factorul de amortizare
- ω_n este pulsația naturală

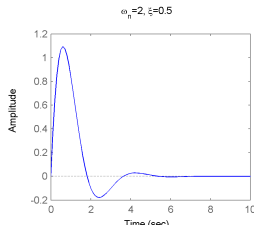
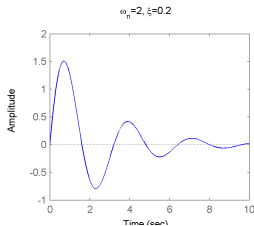
Forme tipice ale răspunsului la impuls de ordinul 2

Ca și la treaptă, factorul de amortizare ξ determină forma răspunsului

$\xi = 0$, neamortizat

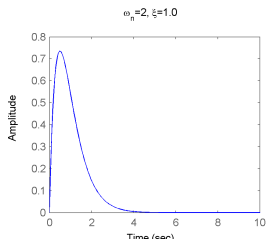


$\xi \in (0, 1)$, **subamortizat** – ne vom concentra pe acest caz

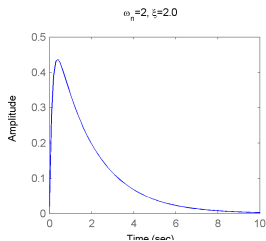


Forme tipice (continuaire)

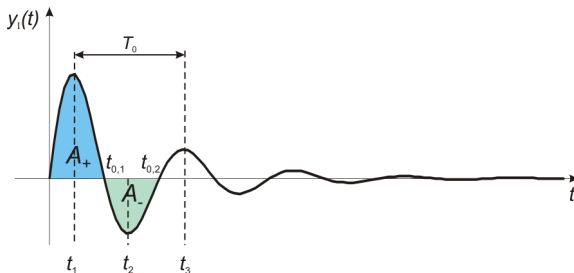
$\xi = 1$, critic amortizat



$\xi > 1$, supraamortizat



Răspunsul la impuls subamortizat

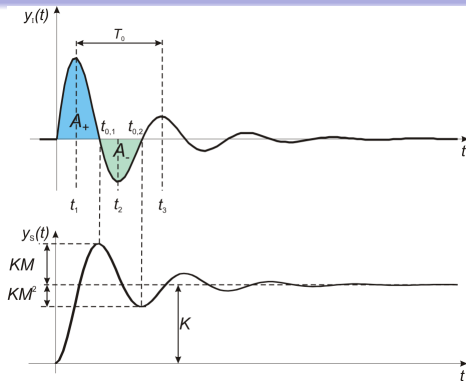


Folosind derivata răspunsului la treaptă calculată mai sus, avem răspunsul la impuls:

$$y_I(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$$

Observăm deja că perioada este neschimbată, deci $T_0 = t_3 - t_1 = 2(t_2 - t_1)$.

Răspunsul la impuls subamortizat: arii

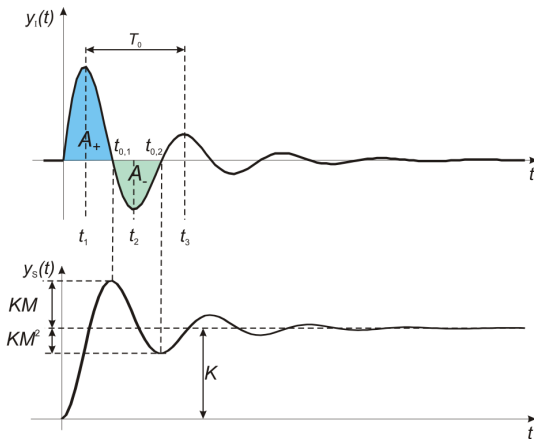


Cum $y_S(t) = \int_0^t y_I(\tau) d\tau$, și reamintindu-ne valorile primului maxim și minim din răspunsul *la treaptă* în funcție de suprareglajul M :

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} y_I(\tau) d\tau = y_S(t_{0,1}) = K + KM, \quad A_- = - \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} y_I(\tau) d\tau =$$

$$= -[y_S(t_{0,2}) - y_S(t_{0,1})] = -[K - KM^2 - (K + KM)] = KM^2 + KM$$

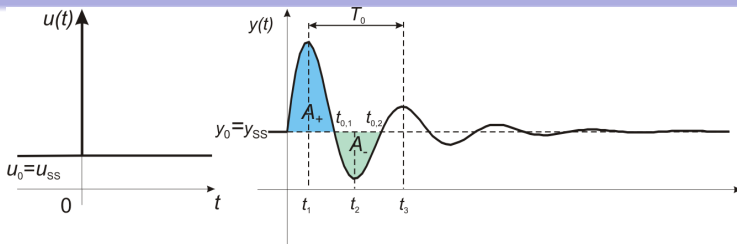
Răspunsul la impuls subamortizat: suprareglaj



Obtinem aşadar:

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{KM^2 + KM}{K + KM} = M$$

Răspunsul la imp. subamort.: Condiții inițiale nenule



În condiții inițiale nenule, impulsul este translatat, $u(t) = u_0 + u_1(t)$, ducând la $y(t) = y_0 + y_1(t)$. De notat că $u_0 = u_{ss}$, $y_0 = y_{ss}$.

Din valorile staționare estimăm **factorul de proporționalitate**: $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$. Perioada T_0 nu se schimbă, dar ariile trebuie găsite **relativ la ieșirea staționară**:

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau = K + KM$$

$$A_- = - \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y(\tau) - y_0) d\tau = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau = KM^2 + KM$$

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(t) - y_0) dt \approx T_s \sum_{k=0}^{k_{0,1}} (y(k) - y_0)$$

$$A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(t)) dt \approx T_s \sum_{k=k_{0,1}}^{k_{0,2}} (y_0 - y(k))$$

unde $k_{0,1}, k_{0,2}$ sunt indicii eşantioanelor corespunzând la $t_{0,1}, t_{0,2}$.

Determinarea parametrilor

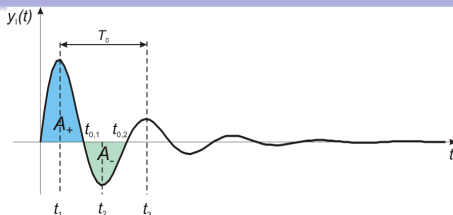
Dat fiind răspunsul la impuls al unui sistem necunoscut:

Algoritm

- 1 Determină ieșirea și intrarea staționară y_{ss} , u_{ss} . Factorul de proporționalitate este $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$.
- 2 Citește valorile de timp unde $y(t)$ intersectează y_{ss} : $t_{0,1}$, $t_{0,2}$. Calculează ariile $A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau$,
 $A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau$. Găsește suprareglajul $M = \frac{A_-}{A_+}$.
- 3 Factorul de amortizare este $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}}$.
- 4 Citește valorile de timp la maxime, t_1 , t_3 , sau la maxim și minim t_1 , t_2 . Calculează perioada $T_0 = t_3 - t_1$, sau $T_0 = 2(t_2 - t_1)$.
- 5 Pulsația naturală: $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0\sqrt{1-\xi^2}}$, sau $\omega_n = \frac{2}{T_0} \sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}$.

De notat că relațiile între M , T_0 , ξ , și ω_n sunt valide în general, deci pașii 3 și 5 folosesc aceleași formule ca și pentru treaptă.

Estimarea lui K în condiții inițiale nule



Rezolvăm $\dot{y}(t) = 0$ pentru a obține t_1 pentru primul maxim, și îl înlocuim în $y(t)$ pentru a obține valoarea maximă în sine. Obținem după câteva calcule:

$$y(t_1) = K\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

relație ce poate fi folosită pentru a estima factorul de proporționalitate: $K = \frac{y(t_1)}{\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$. Este nevoie de ξ și ω_n , care pot fi calculate cu metodele de mai sus independent de condiția inițială.

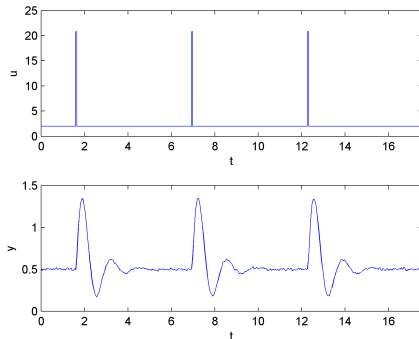
Din aceleași motive ca la ordinul 1, această metodă este mai puțin precisă decât determinarea lui K din valori staționare nenule.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
 - Remarci adiționale

Exemplu de ordinul 2

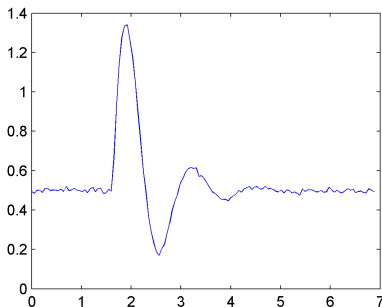
Simulare, 330 de eșantioane cu perioada de eșantionare ≈ 0.053 .



Din nou avem condiții inițiale nenule, și ca de obicei zgomot de măsurare.

Vom folosi primul impuls pentru identificare și celelalte două pentru validare.

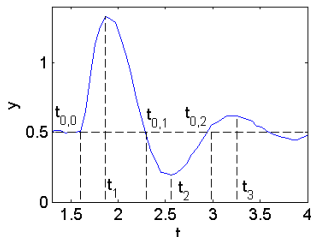
Exemplu: Valori staționare și factor de proporționalitate



Avem $u_0 = u_{ss} = 2$.

Determinăm ieșirea staționară (egală cu cea inițială) prin efectuarea mediei ultimelor 11 eșantioane:

$$y_{ss} = y_0 \approx \frac{1}{11} \sum_{k=120}^{130} y(k) \approx 0.5$$



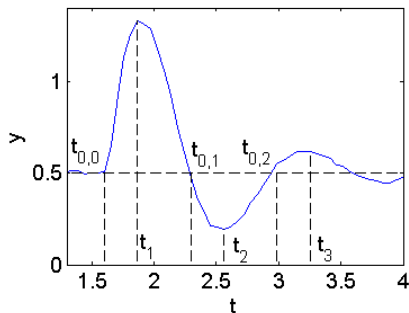
Citim $t_{0,0} \approx 1.6$, $t_{0,1} \approx 2.3$, $t_{0,3} \approx 2.99$. Trebuie ținut cont că impulsul este **aplicat la timpul $t_{0,0} \neq 0$** . Reamintim – ariile sunt estimate numeric:

$$A_+ = \int_{t_{0,0}}^{t_{0,1}} (y(t) - y_0) dt \approx T_s \sum_{k=k_{0,0}}^{k_{0,1}} (y(k) - y_0) \approx 0.34$$

$$A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(t)) dt \approx T_s \sum_{k=k_{0,1}}^{k_{0,2}} (y_0 - y(k)) \approx 0.12$$

unde $k_{0,0}, k_{0,1}, k_{0,2}$ indicii eşantioanelor corespunzând la $t_{0,0}, t_{0,1}, t_{0,2}$.

© 2006 The Authors
Journal compilation © 2006 Blackwell Publishing Ltd



Citim $t_1 \approx 1.92$ și $t_3 \approx 3.2$, ducând la $T_0 = 1.28$. De aici,

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}} \approx 5.16.$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}\hat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\xi\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} = \frac{6.64}{s^2 + 3.21s + 26.68}$$

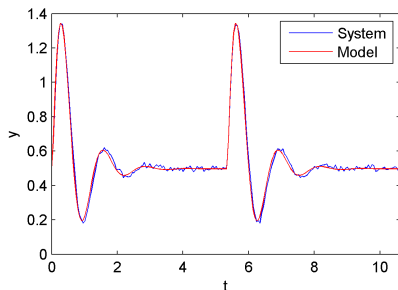
Înapoi la exemplu: Model (aproximat) în spațiul stărilor

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -26.68 & -3.22 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6.64 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 0u(t)\end{aligned}$$

unde x este vectorul de stare, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

Exemplu: Validare

Pentru a porni din condiția inițială nenulă, inițializăm $x_1(0) = y_0, x_2(0) = 0$ la începutul simulării (pornim din regim staționar, de aceea $x_2(0) = \dot{y}(0) = 0$).



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare:

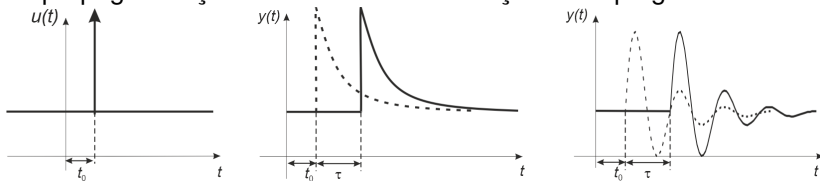
$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \approx 8 \cdot 10^{-4}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - **Remarci adiționale**

Timp mort

Ca și cel la treaptă, răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul 1 sau 2 **cu timpul mort** τ are forma tipică, dar după schimbarea intrării (care poate surveni la $t_0 \neq 0$) există o întârziere τ până când efectul se propagă la ieșire. Valoarea lui τ se citește direct pe grafic.



Funcții de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-s\tau}, \quad H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-s\tau}$$

Rezumat răspuns la impuls

- Răspuns la impuls = derivata răspunsului la treaptă.
- Factor de proporționalitate K : ieșire / intrare în condiții inițiale nenule, altfel din valoarea maximă.
- Ordin 1: constanta de timp T găsită pe axa *timp* când axa *ieșire* atinge 36.8% din diferență.
- Ordin 2: perioada T_0 citită pe grafic, suprareglajul M calculat prin integrare numerică. Rezultă ξ, ω_n .
- Model în spațiul stărilor pentru condiții inițiale diferite de zero.