Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu

Partea III

Analiza răspunsurilor la treaptă şi impuls

Motivare

În general:
În anumite cazuri un model simplu de ordinul 1 sau 2 este suficient; analiza răspunsurilor la treaptă şi impuls este o metodă uşoară de a obţine astfel de modele.

Pentru studenţi:
Metoda cea mai apropiată de cunoştinţele de la teoria sistemelor $\Rightarrow$ o tranziţie mai uşoară către alte metode.

Clasificare

Reamintim **Taxonomia modelelor matematice** din Partea I:

După numărul de parametri:

1. Modele parametrice: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut şi de obicei mic de parametri
2. Modele neparametrice: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri
   Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoştinţele disponibile în avans ("culoare"):

1. Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
2. Modele cutie neagră: complet necunoscute în avans
3. Modele cutie gri: parţial cunoscute

Clasificare (continuare)

La paşii la care studiem graficul în sine, răspunsurile la treaptă şi impuls pot fi interpretate ca modele neparametrice: sunt funcţii de timp continuu care, în general, nu pot fi reprezentate printr-un număr finit de parametri.

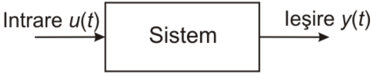
Pe baza graficului însă, vom determina în final o funcţie de transfer – un model parametric.

Model de tip cutie gri.

Studiul răspunsurilor la treaptă şi impuls se numeşte *analiza în domeniul timp*.

Conţinut

Definiţie sistem liniar

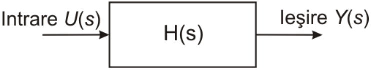


Un sistem este *liniar* dacă satisface principiile de:

Superpoziţie: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u_1(t)$ cu ieşirea $y_1(t)$; şi la $u_2(t)$ cu $y_2(t)$; atunci la intrarea $u_1(t) + u_2(t)$ va răspunde cu ieşirea $y_1(t) + y_2(t)$.

Omogeneitate: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u(t)$ cu ieşirea $y(t)$; atunci la $\alpha u(t)$ va răspunde cu $\alpha y(t)$.

Reprezentarea prin funcţii de transfer



Funcţia de transfer este:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, \quad m \leq n$$

unde $U(s)$ şi $Y(s)$ sunt, respectiv, transformatele Laplace ale semnalelor de intrare şi ieşire în domeniul timp $u(t)$, $y(t)$. (Important: în condiţii iniţiale nule.)

Transformata Laplace a unui semnal $f(t)$ este:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

Transformata Laplace: discuţie

- s se numeşte argument *complex* (este un număr complex), iar transformata Laplace efectuează trecerea a unei funcţii din domeniul timp t în domeniul complex s.
- Avantajul este că multe operaţii aplicate uzual în inginerie (derivare, integrare etc.) devin mult mai simple în domeniul s.

Conţinut

Sistem de ordinul 1: Exemplu

Sistemele de ordinul 1 sunt frecvent întâlnite. Exemplu tipic: un sistem termic.
Considerăm un obiect la temperatura θ_1 (variabila de ieşire) plasat într-un mediu la temperatura θ_2 (variabila de intrare). Avem:

$$C\dot{\theta}_1(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{R}$$

unde C este inerţia termică şi R este rezistenţa termică.

Aplicăm transformata Laplace de ambele părţi ale ecuaţiei:

$$Cs\Theta_1(s) = \frac{\Theta_2(s) - \Theta_1(s)}{R}$$

obţinând funcţia de transfer:

$$H(s) = \frac{\Theta_1(s)}{\Theta_2(s)} = \frac{1}{CRs + 1}$$

Sistem de ordinul 1: Forma generală

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

unde:

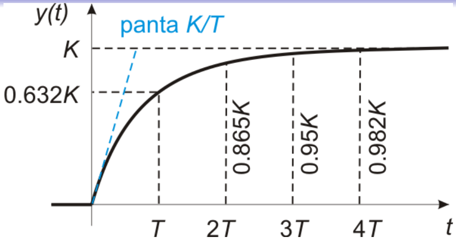
- K este factorul de proporţionalitate ($= 1$ în exemplu)
- T este constanta de timp ($= CR$ în exemplu)

Conţinut

Semnalul treaptă ideal

$$u_S(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Răspunsul la treaptă (indicial) de ordinul 1 ideal



Rezolvând ecuaţia diferenţială pentru $y(t)$ (sau mai simplu: rezolvând pentru $Y(s)$ şi aplicând transformata Laplace inversă $\mathcal{L}^{-1}$), obţinem:

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

ducând la:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K(1-0) = K$$

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{T}e^{-t/T}, \quad \dot{y}(0) = \frac{K}{T}e^{0} = \frac{K}{T}$$

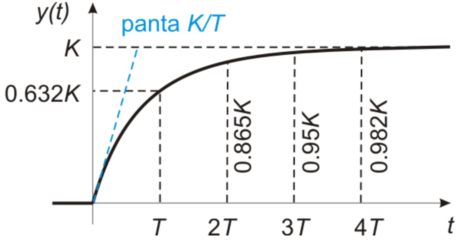
$$y(T) = K(1 - e^{-1}) \approx 0.632K$$

şi în mod similar pentru $t = 2T, 3T, 4T$ (vezi figura).

Determinarea parameterilor

Până acum, totul cunoscut de la: TS, Modelarea proceselor.

Mai departe, considerăm că este dat răspunsul unui sistem real necunoscut: acesta este modelul neparametric. Îl vom folosi pentru a găsi o funcţie de transfer aproximată (model parametric).



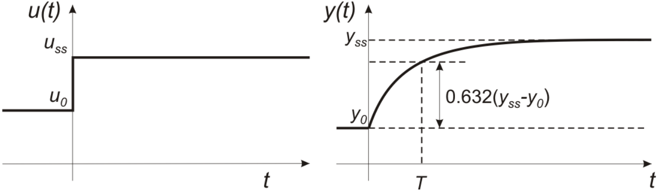
Algoritm pentru **identificarea sistemului**

1. Citeşte ieşirea în regim staţionar. Factorul de proporţionalitate K este egal cu această ieşire.
2. Găseşte valoarea timpului la care ieşirea atinge 0.632 din valoarea staţionară. Aceasta este constanta de timp T.

Condiţii iniţiale nenule

În practică, adeseori semnalul treaptă ideal nu poate fi folosit, fiindcă sistemul trebuie menţinut în jurul unui punct de funcţionare sigur/profitabil. Vom presupune că înaintea experimentului sistemul era în regim staţionar la ieşirea y_0 cu intrarea constantă u_0.

Realizarea practică a treptei este adesea un semnal rectangular ca în figură. Răspunsul sistemului este aşadar non-ideal.

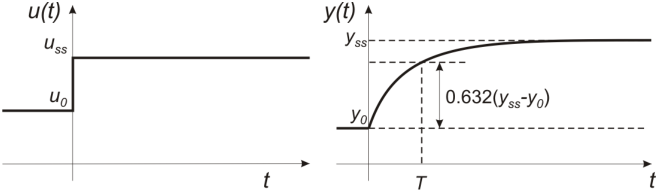


Dar sistemul este liniar! Noua intrare este $u(t) = u_0 + (u_{ss} - u_0)u_S(t)$ unde $u_S(t)$ este treapta ideală. Aşadar, dacă notăm răspunsul la treaptă ideal cu $y_S(t)$, avem noua ieşire:

$$y(t) = y_0 + (u_{ss} - u_0)y_S(t)$$

adică o simplă translatare şi scalare a semnalului ideal.

Condiţii iniţiale nenule (continuare)

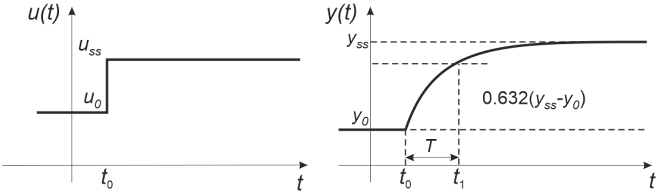


Obţinem aşadar:

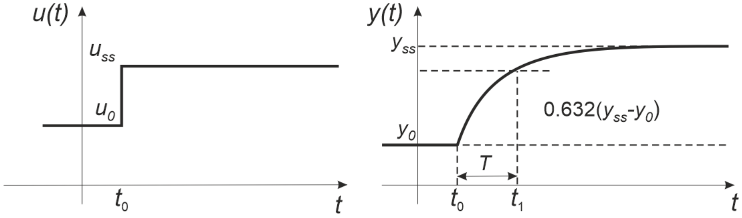
$$y_{ss} = y_0 + (u_{ss} - u_0)K$$
$$y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0)$$

Treaptă aplicată la timp nenul

Timpul la care este aplicată treapta poate fi şi el diferit de 0, o problemă rezolvată uşor prin translatarea axei de timp. Astfel de situaţii pot apărea pentru oricare din răspunsurile la treaptă şi impuls studiate în această parte a cursului. Vom furniza procedura pentru răspunsurile la treaptă, dar nu pentru cele la impuls; procedura este similară acolo.



Algoritm general

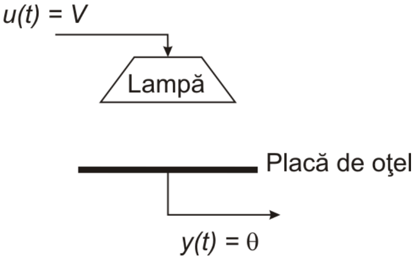


Algoritm general

1. Citeşte u_0, y_0, u_{ss}, y_{ss}, valorile iniţiale şi în regim staţionar ale intrării şi ieşirii. Calculează $\boxed{K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0}}$.
2. Citeşte timpul t_0 unde are loc treapta, şi t_1 unde ieşirea urcă la 0.632 din diferenţă. Calculează $\boxed{T = t_1 - t_0}$.

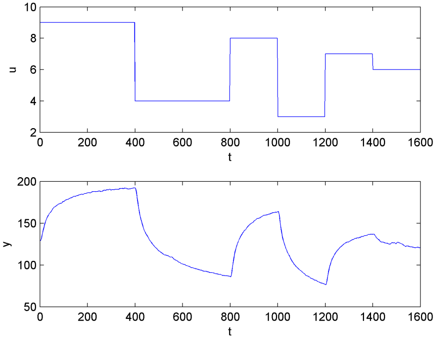
Conţinut

Exemplu: Sistem termic



Considerăm sistemul termic din figură (diferit de exemplul anterior). Intrarea este voltajul V aplicat lămpii, iar ieşirea este temperatura θ citită de un termocuplu montat pe spatele plăcii de oţel.

Sistem termic: Date experimentale



Datele sunt obţinute din baza de date Daisy. Semnalele sunt în timp discret, cu perioada de eşantionare $T_s = 2\,\mathrm{s}$, dar pentru analiza în domeniul timp le vom trata ca fiind în timp continuu.

De notat: prezenţa zgomotului în date! Zgomotul apare aproape întotdeauna în experimentele de identificare.

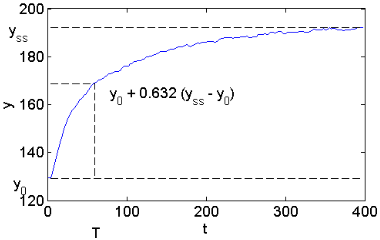
Vom folosi prima treaptă pentru identificare, şi restul pentru validare.

Perioada de eşantionare

Definiţie: Perioada de eşantionare T_s este intervalul de timp continuu dintre două momente succesive de eşantionare (a semnalelor de intrare, de ieşire sau a altor semnale din sistem).

Nu confundaţi perioada de eşantionare T_s cu constanta de timp T înmulţită cu argumentul complex s!

Sistem termic: Model şi parametri



Avem $y_{ss} \approx 192^\circ$ C, $y_0 \approx 129^\circ$ C. Intrarea $u_{ss} = 9$ V şi ştim din experiment că intrarea iniţială $u_0 = 6$ V. Aşadar:

$$K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0} \approx \frac{192 - 129}{9 - 6} \approx 21$$

Mai departe, $y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0) \approx 169$, şi identificând acest punct pe grafic obţinem $T \approx 60$.

Sistem termic: Modelul ca funcţie de transfer

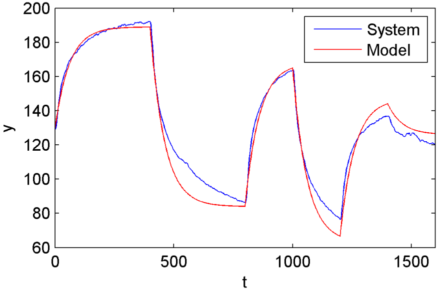
$$\widehat{K} = 21$$
$$\widehat{T} = 60$$
$$\widehat{H}(s) = \frac{\widehat{K}}{\widehat{T}s + 1} = \frac{21}{60s + 1}$$

Notaţia $\widehat{\ }$ evidenţiază faptul că parametrii, şi aşadar modelul, sunt o aproximare.

Matlab: `H = tf(num, den)`, cu polinoamele `num` (numărător) şi `den` (numitor) reprezentate prin vectori de coeficienţi în ordinea descrescătoare a puterilor lui s.

(De notat: Calculele sunt de fapt efectuate cu numere `double` în Matlab, deci folosirea numerelor din prezentări va duce la rezultate uşor diferite. Această observaţie se aplică tuturor exemplelor.)

Sistem termic: Validare

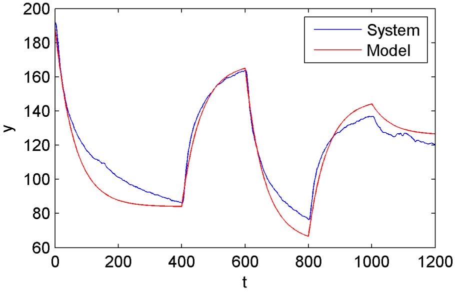


De notat că o este necesară procedură specială pentru a lua în considerare condiţia iniţială nenulă; o vom detalia când studiem răspunsul la impuls.

Modelul nu este excelent – de ex. dinamica de răcire este mai înceată decât cea de încălzire, deci în realitate sistemul nu este unul simplu de ordinul 1.

Cu toate acestea, funcţia de transfer este suficientă pentru un prim model aproximativ – utilizarea tipică a analizei în domeniul timp.

Sistem termic: Validare (continuare)



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare (de la treapta 2 încolo):

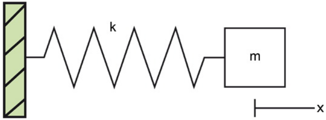
$$\boxed{J = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^2(k)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\widehat{y}(k) - y(k))^2 \approx 62.10$$

MSE are sens fiindcă datele sunt de fapt eşantionate în timp discret.

Conţinut

Sistem de ordinul 2: Exemplu

Sistemele de ordinul 2 sunt şi ele adeseori întânite.



Considerăm o masă m ataşată unui arc, căreia îi aplicăm o forţă f (intrarea) în direcţia opusă arcului. Măsurăm poziţia x a masei relativ la poziţia de repaus a arcului (ieşirea). Din legea a doua a lui Newton:

$$m\ddot{x}(t) = f(t) - kx(t)$$

unde k este constanta elastică a arcului.

Aplicând transformata Laplace de ambele părţi:

$$ms^2X(s) = F(s) - kX(s)$$

ducând la funcţia de transfer:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

Sistem de ordinul 2: Forma generală

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

unde:

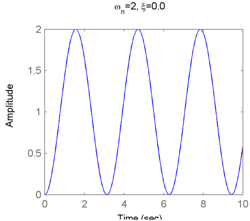
- K este factorul de proporţionalitate ($= \frac{1}{k}$ în exemplu)
- ξ este factorul de amortizare ($= 0$ în exemplu)
- ω_n este pulsaţia naturală ($= \sqrt{k/m}$ în exemplu)

Conţinut

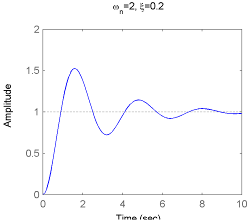
Forme tipice ale răspunsului la treaptă de ordinul 2

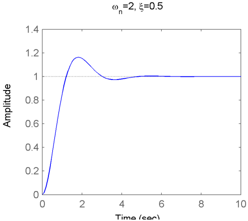
Factorul de amortizare ξ determină forma răspunsului.

$\xi = 0$, neamortizat



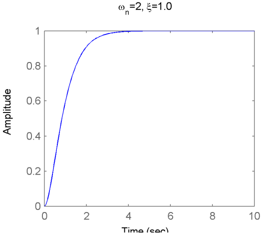
$\xi \in (0, 1)$, subamortizat; valori ξ mai mici duc la oscilaţii mai mari



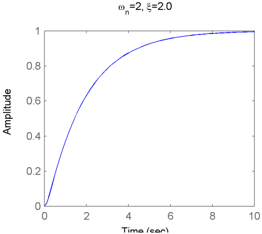


Forme tipice (continuare)

$\xi = 1$, critic amortizat

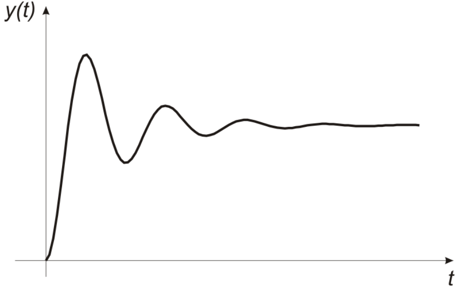


$\xi > 1$, supraamortizat



Răspuns la treaptă de ordinul 2 subamortizat

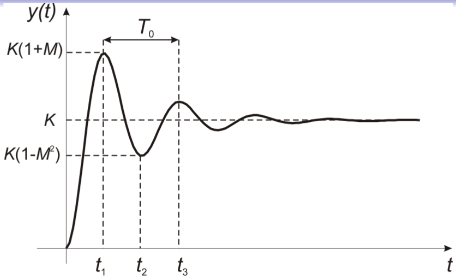
Ne ocupăm în principal de cazul subamortizat, $\xi \in (0, 1)$



Rezolvând pentru $y(t)$ obţinem:

$$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \arccos \xi)\right]$$

Caracteristicile răspunsului



Valoarea staţionară: $\lim_{t\to\infty} K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\sin(\dots)\right] = K$

Aflăm maximele şi minimele fixând derivata la zero:

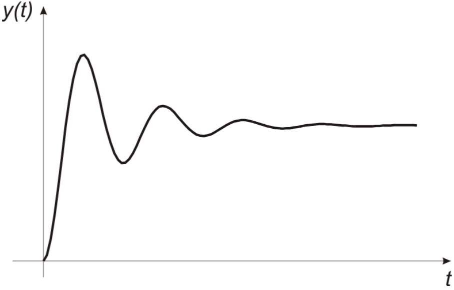
$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t) = 0$$

$$\Rightarrow t_m = \frac{m\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}, \quad m \geq 0$$

$$y(t_m) = K[1 + (-1)^{m+1}M^m],$$ unde *suprareglajul* $M = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

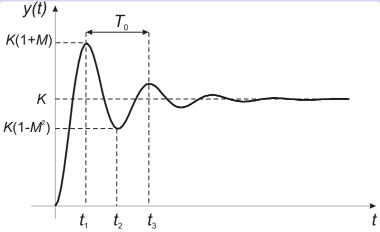
Pornirea de la răspuns la treaptă

Considerăm acum că este dat răspunsul unui sistem necunoscut.



Folosind elementele de mai sus, vom afla o funcţie de transfer aproximată a sistemului.

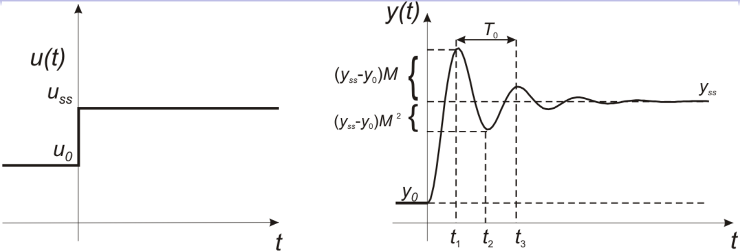
Determinarea parametrilor



Algoritm

1. Determină ieşirea staţionară y_{ss}. Acesta este factorul de proporţionalitate K.
2. Determină suprareglajul M, (a) din primul maxim: $M = \frac{y(t_1)-y_{ss}}{y_{ss}}$, sau (b) din raportul între primul minim şi maxim: $M = \frac{y_{ss}-y(t_2)}{y(t_1)-y_{ss}}$.
3. Rezolvă $M = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, obţinând $\boxed{\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2+\log^2 1/M}}}$
4. Citeşte perioada de oscilaţie, între maxime succesive $\boxed{T_0 = t_3 - t_1} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$; sau $T_0 = 2(t_2 - t_1)$. Apoi $\boxed{\omega_n = \frac{2\pi}{T_0\sqrt{1-\xi^2}}}$, sau $\omega_n = \frac{2}{T_0}\sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}$.

Condiţii iniţiale nenule

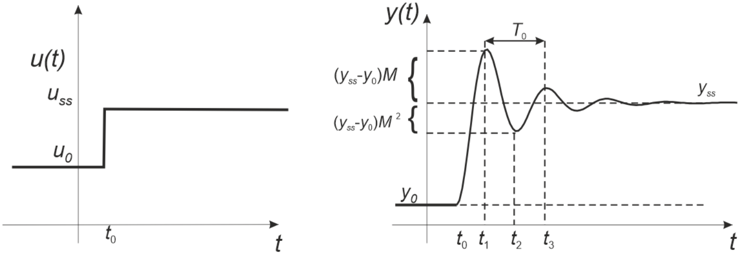


Ca şi la ordinul 1: noua intrare este $u(t) = u_0 + (u_{ss} - u_0)u_S(t)$, iar noua ieşire este versiunea translatată şi scalată a răspunsului ideal $y_S(t)$: $y(t) = y_0 + (u_{ss} - u_0)y_S(t)$. Algoritm modificat:

1. Factor de proporţionalitate $\boxed{K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0}}$.
2. Supraregiaj (a) $\boxed{M = \frac{y(t_1) - y_{ss}}{y_{ss} - y_0}}$ (trebuie scăzut y_0), sau (b) $M = \frac{y_{ss} - y(t_2)}{y(t_1) - y_{ss}}$ (nici o schimbare aici).

ξ, T_0: la fel ca înainte.

Timp iniţial nenul

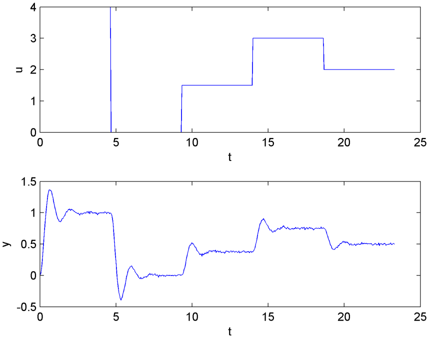


Ca şi pentru ordinul 1, translatăm axa orizontală cu timpul de start t_0 al treptei. Nu există nici un impact asupra algoritmului, fiindcă se folosesc oricum timpi relativi pentru calculul perioadei de oscilaţie.

Conţinut

Exemplu de ordinul 2

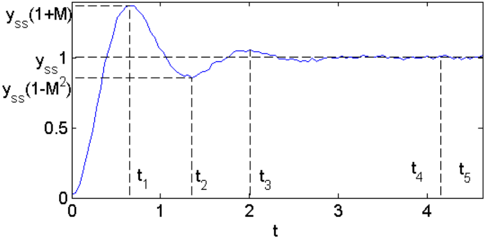
Datele sunt generate în simulare, 500 de eşantioane cu perioada de eşantionare ≈ 0.047.



De notat din nou zgomotul. De asemenea, condiţiile iniţiale sunt nule ($u_0 = y_0 = 0$) dar treptele au valori nonstandard, diferite de 1.

Folosim prima treaptă pentru identificare, şi treptele 3–5 pentru validare, (treapta 2 readuce sistemul în condiţii nule).

Exemplu: Răspunsul la treaptă pentru identificare

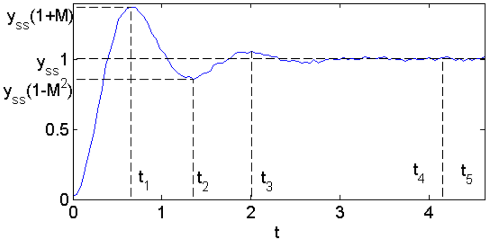


Cum ieşirea este afectată de zgomot, vom determina valoarea sa staţionară prin efectuarea mediei câtorva eşantioane din regim staţionar, mai exact eşantioanele de la 90 la 100, între t_4 and t_5:

$$y_{ss} \approx \frac{1}{11} \sum_{k=90}^{100} y(k) \approx 1.00$$

Citim pe grafic: $t_1 \approx 0.65$, $t_2 \approx 1.35$, $t_3 \approx 1.96$, $y(t_1) \approx 1.37$, $y(t_2) \approx 0.86$. De asemenea, $u_{ss} = 4$.

Exemplu: Determinarea parametrilor

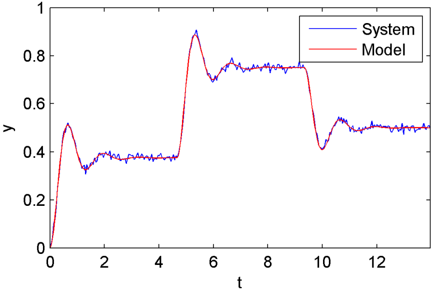


1. Factor de proporţionalitate $K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0} = \frac{y_{ss}}{u_{ss}} \approx 0.25$.
2. Suprareglaj $M = \frac{y(t_1) - y_{ss}}{y_{ss} - y_0} = \frac{y(t_1) - y_{ss}}{y_{ss}} \approx 0.36$.
3. Factor de amortizare $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}} \approx 0.31$.
4. Perioada $T_0 = t_3 - t_1 \approx 1.31$, ducând la pulsaţia naturală $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0\sqrt{1-\xi^2}} \approx 5.05$.

Exemplu: Modelul ca funcţie de transfer

$$\widehat{K} = 0.25$$
$$\widehat{\xi} = 0.31$$
$$\widehat{\omega_n} = 5.05$$
$$\widehat{H}(s) = \frac{\widehat{K}\widehat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\widehat{\xi}\widehat{\omega}_n s + \widehat{\omega}_n^2} = \frac{6.38}{s^2 + 3.09s + 25.51}$$

Exemplu: Validare



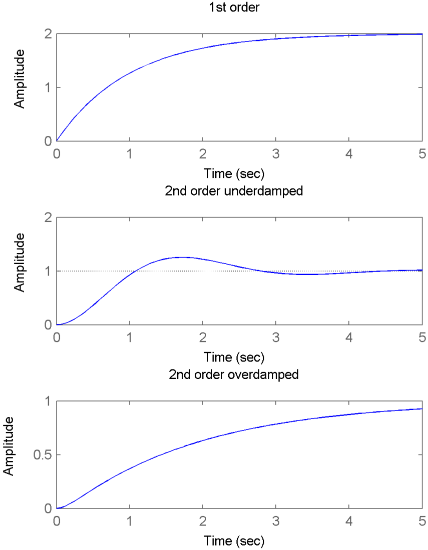
Calitatea modelului este foarte bună (ceea ce nu este surprinzător, datele fiind generate în simulare).

Eroarea medie pătratică (MSE):

$$J = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^2(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\widehat{y}(k) - y(k))^2 \approx 9.66 \cdot 10^{-5}$$

Conţinut

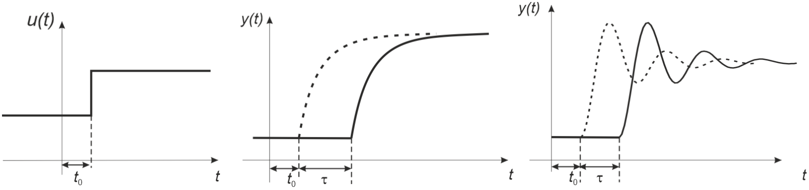
Alegerea ordinului



Chiar dacă este critic sau supraamortizat, la $t = 0$ răspunsul unui sistem de ordinul 2 va avea derivata egală cu 0: va fi tangent la axa timpului. În schimb, panta tangentei este de K/T pentru sistemele de ordinul 1.

Timp mort

Răspunsul unui sistem de ordinul 1 sau 2 cu timp mort τ are aceeaşi formă ca şi mai sus, dar după ce intrarea se schimbă, există o întârziere τ înainte ca efectul să se propage la ieşire. A nu se confunda cu timpul potenţial nenul t_0 de aplicare a semnalului treaptă! Timpul mort τ este intervalul de *după* t_0 de care are nevoie ieşirea pentru a începe să reacţioneze.



Timpul mort este reprezentat în funcţia de transfer după cum urmează:

$$H(s) = \frac{K}{Ts+1} e^{-s\tau}, \quad H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-s\tau}$$

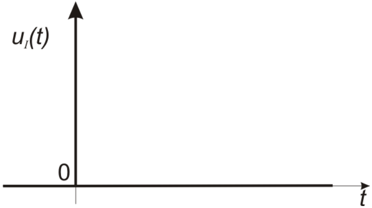
Valoarea lui τ se citeşte direct pe grafic.

Rezumat răspuns la treaptă

- Factor de proporţionalitate K: diferenţa dintre nivelurile la ieşire / diferenţa dintre nivelurile la intrare.
- Ordin 1: constanta de timp T găsită pe axa *timp* când axa *ieşire* atinge 63.2% din diferenţă.
- Ordin 2: perioada T_0 citită pe grafic, suprareglajul M calculat din maxime şi minime. Rezultă ξ, ω_n.
- Inspecţie grafic + eroare medie pătratică utilizată pentru validarea modelelor.
- Mediere eşantioane pentru zgomot în valorile iniţiale / staţionare.
- Timpul iniţial diferit de zero şi întârzierile tratate prin translatarea corespunzătoare a valorilor de timp; întârziererea intră în funcţia de transfer.

Conţinut

Intrarea impuls ideală



Impulsul ideal este funcţia delta a lui Dirac. O definiţie informală:

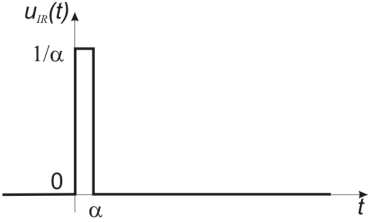
$$u_\mathrm{I}(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

cu o condiţie suplimentară: $\int_{-\infty}^{\infty} u_\mathrm{I}(t)dt = 1$.

(De fapt, impulsul ideal nu este o funcţie, ci o aşa-numită distribuţie.)

Realizarea practică a impulsului

În realitate, evident nu putem crea semnale de amplitudine infinită. Impulsul este aşadar aproximat de către un semnal rectangular:



$$u_{\mathrm{IR}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & t \in [0, \alpha) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

unde $\alpha \ll$ (mult mai mic decât constantele de timp ale sistemului).

De notat că dreptunghiul are aria 1, $\int_{-\infty}^{\infty} u_{\mathrm{IR}}(t)dt = 1$.

Această aproximare introduce diferenţe (erori) faţă de răspunsul real la impuls, dar pentru α mic eroarea este acceptabilă. Vom dezvolta analiza în cazul ideal, dar exemplele folosesc realizarea practică.

O proprietate utilă a răspunsului la impuls

În domeniul complex:

$$\text{treapta } U_S(s) = \frac{1}{s}, \qquad \text{impulsul } U_{\mathrm{I}}(s) = 1$$

Reamintim că răspunsul în domeniul timp al unui sistem se poate scrie: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, iar $Y(s) = H(s)U(s)$.

Deci:

$$Y_S(s) = \frac{1}{s} Y_{\mathrm{I}}(s), \qquad Y_{\mathrm{I}}(s) = sY_S(s)$$

$$y_S(t) = \int_0^t y_{\mathrm{I}}(\tau) d\tau, \qquad y_{\mathrm{I}}(t) = \dot{y}_S(t)$$

Răspunsul la impuls este *derivata răspunsului la treaptă*.

Conţinut

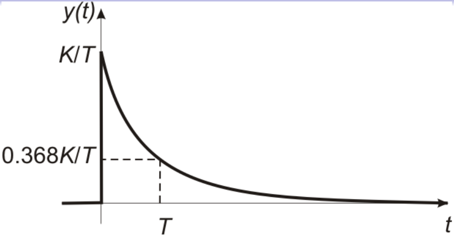
Reamintim: Sistem de ordinul 1

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

unde:

- K este factorul de proporţionalitate
- T este constanta de timp

Răspunsul la impuls de ordinul 1 ideal



Folosind relaţia cu răspunsul la treaptă, şi derivata acestui răspuns pe care am calculat-o deja, avem direct răspunsul la impuls:

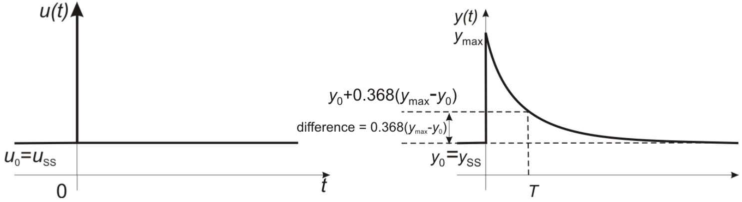
$$y_{\mathrm{I}}(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}, \qquad t \geq 0$$

de unde rezultă:
$$\begin{cases} y_{\mathrm{I}}(0) = \dfrac{K}{T} = y_{\max} \\ y_{\mathrm{I}}(T) = \dfrac{K}{T} e^{-1} = y_{\max} e^{-1} \approx 0.368 y_{\max} \end{cases}$$

De notat: $y_{\mathrm{I}}(4T) = 0.0183 y_{\max}$, ieşirea este aproximativ staţionară după $4T$.

Condiţii iniţiale nenule

În condiţii iniţiale nenule, impulsul este translatat pe axa verticală. Vom presupune că la înaintea experimentului sistemul era în regim staţionar cu ieşirea y_0 şi intrarea constantă u_0.



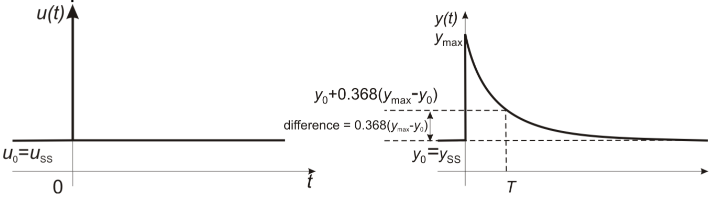
Din liniaritatea sistemului, şi intrarea fiind $u(t) = u_0 + u_\mathrm{I}(t)$, avem o ieşire translatată $y(t) = y_0 + y_I(t)$. Intrarea nu este scalată, fiindcă rezultatul nu ar mai fi un impuls aproximat (aria ar fi diferită de 1).

Aşadar, comportamentul este: $$\begin{cases} y_{\max} = y_0 + \dfrac{K}{T} \\ y(T) = y_0 + 0.368(y_{\max} - y_0) \end{cases}$$

De notat că $u_0 = u_{ss}, y_0 = y_{ss}$.

Determinarea parametrilor

Considerăm acum că este dat răspunsul la impuls al unui sistem necunoscut. Vom folosi acest răspuns pentru a găsi o funcţie de transfer aproximată.

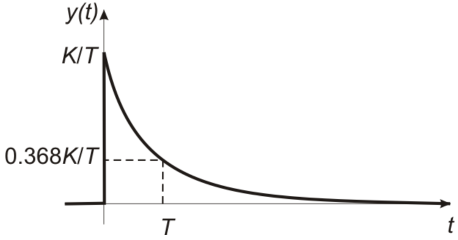


Presupunem întâi condiţii iniţiale nenule fiindcă sunt favorabile: oferă o metodă robustă de a estima factorul de proporţionalitate K.

Algoritm

1. Citeşte ieşirea staţionară (sau iniţială) $y_{ss} = y_0$, la fel şi intrarea $u_{ss} = u_0$. Apoi, $\boxed{K = y_{ss}/u_{ss}}$.
2. Citeşte $y_{\max}$ şi citeşte constanta de timp T la momentul în care ieşirea descreşte la $\boxed{0.368 \text{ din diferenţa } y_{\max} - y_0}$.

Determinarea parametrilor în condiţii iniţiale nule



Putem estima factorul de proporţionalitate folosind $y_{\max} = \frac{K}{T}$, dar în practică această metodă nu este la fel de precisă, datorită zgomotului şi a caracterului non-ideal al impulsului.

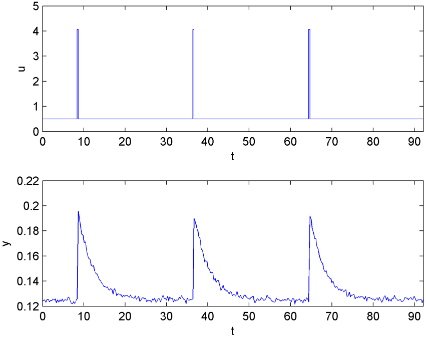
Algoritm

1. Citeşte $y_{\max}$ şi determină timpul la care ieşirea descreşte la 0.368 din $y_{\max}$. Aceasta este constanta de timp T.
2. Calculează $K = y_{\max} T$.

Conţinut

Exemplu de ordinul 1

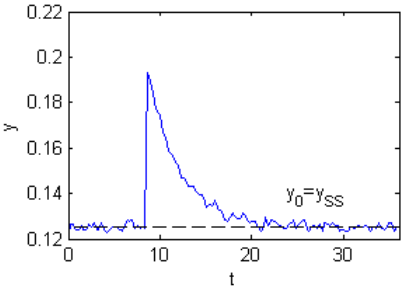
Date generate în simulare, 330 eşantioane cu $T_s = 0.28$ (30 eşantioane partea staţionară iniţială, apoi câte 100 pentru fiecare impuls). Impulsurile sunt realizate prin dreptunghiuri cu $\alpha = T_s = 0.28$ şi amplitudine $1/\alpha \approx 3.57$.



De notat zgomotul de măsurare şi condiţiile iniţiale nenule.

Folosim primul impuls pentru identificare şi celelalte pentru validare.

Exemplu: Model şi parametri

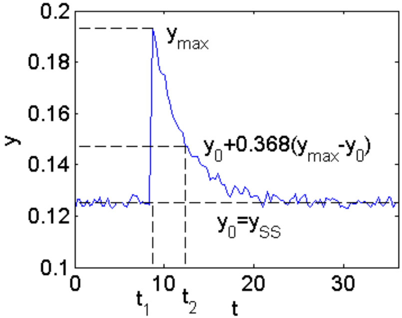


Folosim graficul pentru a estima funcţia de transfer. Avem $u_0 = u_{ss} = 0.5$.

Găsim ieşirea staţionară (egală cu cea iniţială) efectuând media câtorva eşantioane:

$$y_{ss} = y_0 \approx \frac{1}{11} \sum_{k=120}^{130} y(k) \approx 0.13$$

Exemplu: Model şi parametri (continuare)



Ieşirea maximă este $y_{\max} \approx 0.19$, atinsă la $t_1 \approx 8.86$. Valoarea $y_0 + 0.368(y_{\max} - y_0) \approx 0.15$ este atinsă la $t_2 \approx 12.60$. Aşadar:

1. $K = y_{ss}/u_{ss} \approx 0.25$.
2. $T = t_2 - t_1 \approx 3.92$.

De notat că luăm în considerare timpul nenul t_1 la care este aplicat impulsul!

Exemplu: Modelul ca funcţie de trannsfer

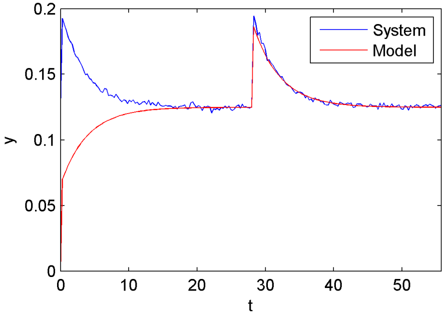
$$\widehat{K} = 0.25$$

$$\widehat{T} = 3.92$$

$$\widehat{H}(s) = \frac{\widehat{K}}{\widehat{T}s + 1} = \frac{0.25}{3.92s + 1}$$

Exemplu: Validare

Comparăm datele de la sistem cu răspunsul modelului la intrarea de validare (impulsurile 2 şi 3):



Simularea nu ia în considerare condiţiile iniţiale nenule ale sistemului, şi de aceea partea iniţială are diferenţe mari.

Vom prezenta o metodă de simulare din condiţii iniţiale nenule, care funcţionează nu doar pentru impulsuri, ci pentru *orice* semnal de intrare (treaptă, etc.).

Model în spaţiul stărilor pentru un sistem de ordinul n

Un model în spaţiul stărilor, în timp continuu, reprezintă un sistem liniar sub forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

unde:

- x este vectorul de stare, $x \in \mathbb{R}^n$ cu n ordinul sistemului
- u şi y sunt intrarea şi ieşirea obişnuite. Pot fi vectori dacă sistemul are mai multe intrări sau ieşiri, dar aici semnale scalare sunt suficiente.
- Matricile A de stare, B de intrare, C de ieşire, D de transfer direct. Acestea au dimensiunile potrivite, aici: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (vector datorită intrării scalare), $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (vector datorită ieşirii scalare), $D \in \mathbb{R}$ (un scalar, de obicei 0).

Model în spaţiul stărilor pentru un sistem de ordinul 1

Pornind de la funcţia de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts+1} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

şi întorcându-ne în domeniul timp, dinamica sistemului este:

$$\dot{y}(t) = \frac{-1}{T}y(t) + \frac{K}{T}u(t)$$

Luând $x = y$ (cum sistemul este de ordinul 1, o singură variabilă de stare este suficientă), putem scrie:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

deci modelul în spaţiul stărilor are $A = -\frac{1}{T}$, $B = \frac{K}{T}$, $C = 1$, $D = 0$.

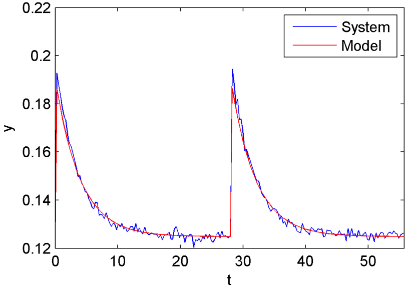
Înapoi la exemplu: Model aproximat în spaţiul stărilor

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\widehat{T}}x(t) + \frac{\widehat{K}}{\widehat{T}}u(t) = -0.26x(t) + 0.06u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

Matlab: `Hss = ss(A, B, C, D)`

Exemplu: Validare din condiţia iniţială corectă

Pentru a lua condiţia iniţială în considerare, iniţializăm $x(0) = y_0$ la începutul simulării.



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^2(k) \approx 3.74 \cdot 10^{-6}$$

Conţinut

Reamintim: Sistem de ordinul 2

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

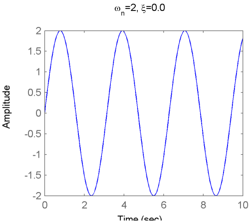
unde:

- K este factorul de proporţionalitate
- ξ este factorul de amortizare
- ω_n este pulsaţia naturală

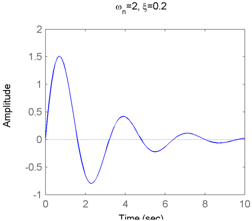
Forme tipice ale răspunsului la impuls de ordinul 2

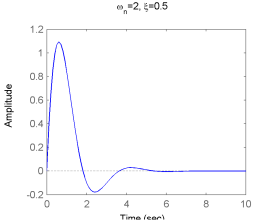
Ca şi la treaptă, factorul de amortizare ξ determină forma răspunsului

$\xi = 0$, neamortizat



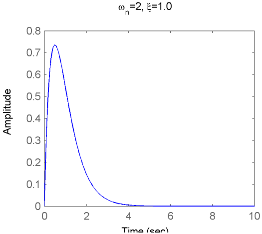
$\xi \in (0, 1)$, subamortizat – ne vom concentra pe acest caz



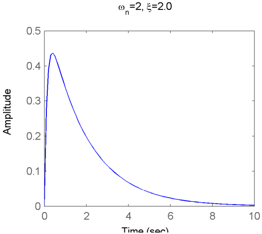


Forme tipice (continuare)

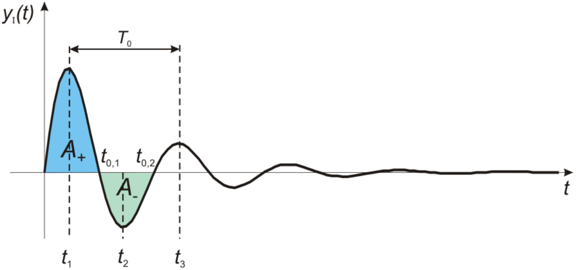
$\xi = 1$, critic amortizat



$\xi > 1$, supraamortizat



Răspunsul la impuls subamortizat

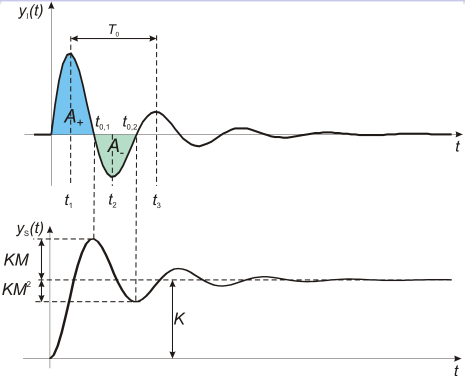


Folosind derivata răspunsului la treaptă calculată mai sus, avem răspunsul la impuls:

$$y_{\mathrm{I}}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t)$$

Observăm deja că perioada este neschimbată, deci $T_0 = t_3 - t_1 = 2(t_2 - t_1)$.

Răspunsul la impuls subamortizat: arii

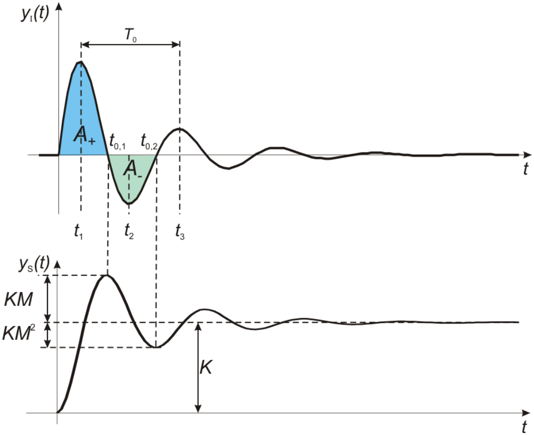


Cum $y_S(t) = \int_0^t y_\mathrm{I}(\tau)d\tau$, şi reamintindu-ne valorile primului maxim şi minim din răspunsul *la treaptă* în funcţie de suprareglajul M:

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} y_\mathrm{I}(\tau)d\tau = y_\mathrm{S}(t_{0,1}) = K + KM, \qquad A_- = -\int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} y_\mathrm{I}(\tau)d\tau =$$

$$= -[y_\mathrm{S}(t_{0,2}) - y_\mathrm{S}(t_{0,1})] = -[K - KM^2 - (K + KM)] = KM^2 + KM$$

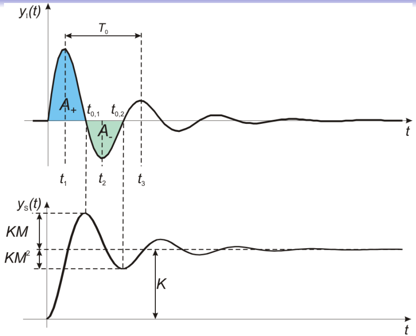
Răspunsul la impuls subamortizat: suprareglaj



Obţinem aşadar:

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{KM^2 + KM}{K + KM} = M$$

Răspunsul la impuls subamortizat: estimare arii



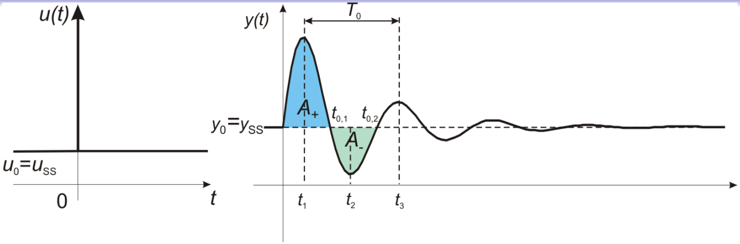
Ariile sunt estimate numeric:

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(t) - y_0)dt \approx T_s \sum_{k=0}^{k_{0,1}} (y(k) - y_0)$$

$$A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(t))dt \boxed{\approx T_s \sum_{k=k_{0,1}}^{k_{0,2}} (y_0 - y(k))}$$

unde $k_{0,1}$, $k_{0,2}$ sunt indicii eşantioanelor corespunzând la $t_{0,1}$, $t_{0,2}$.

Condiţii iniţiale nenule: estimarea lui K



În condiţii iniţiale nenule, impulsul este translatat, $u(t) = u_0 + u_{\mathrm{I}}(t)$, ducând la $y(t) = y_0 + y_I(t)$. De notat că $u_0 = u_{ss}, y_0 = y_{ss}$.

Din valorile staţionare estimăm factorul de proporţionalitate: $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$. Perioada T_0 nu se schimbă, dar ariile trebuiesc găsite relativ la ieşirea staţionară:

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau = K + KM$$

$$A_- = -\int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y(\tau) - y_0) d\tau = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau = KM^2 + KM$$

Determinarea parametrilor

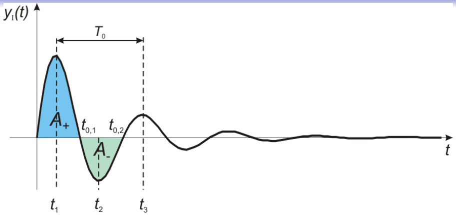
Dat fiind răspunsul la impuls al unui sistem necunoscut:

Algoritm

1. Determină ieşirea şi intrarea staţionară y_{ss}, u_{ss}. Factorul de proporţionalitate este $\boxed{K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}}$.
2. Citeşte valorile de timp unde $y(t)$ intersectează y_{ss}: $t_{0,1}$, $t_{0,2}$,. Calculează ariile $A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau$, $A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau$. Găseşte suprareglajul $\boxed{M = \frac{A_-}{A_+}}$.
3. Factorul de amortizare este $\boxed{\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}}}$.
4. Citeşte valorile de timp la maxime, t_1, t_3, sau la maxim şi minim t_1, t_2. Calculează perioada $\boxed{T_0 = t_3 - t_1}$, sau $T_0 = 2(t_2 - t_1)$.
5. Pulsaţia naturală: $\boxed{\omega_n = \frac{2\pi}{T_0\sqrt{1-\xi^2}}}$, sau $\omega_n = \frac{2}{T_0}\sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}$.

De notat că relaţiile între M, T_0, ξ, şi ω_n sunt valide în general, deci paşii 3 şi 5 folosesc aceleaşi formule ca şi pentru treaptă.

Estimarea lui K în condiţii iniţiale nule



Rezolvăm $\dot{y}(t) = 0$ pentru a obţine t_1 pentru primul maxim, şi îl înlocuim în $y(t)$ pentru a obţine valoarea maximă în sine. Obţinem după câteva calcule:

$$y(t_1) = K\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

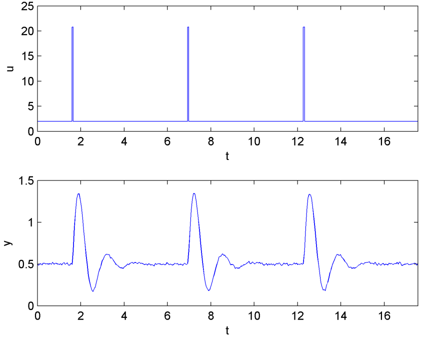
relaţie ce poate fi folosită pentru a estima factorul de proporţionalitate: $K = \frac{y(t_1)}{\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$. Este nevoie de ξ şi ω_n, care pot fi calculate cu metodele de mai sus independent de condiţia iniţială.

Din aceleaşi motive ca la ordinul 1, această metodă este mai puţin precisă decât determinarea lui K din valori staţionare nenule.

Conţinut

Exemplu de ordinul 2

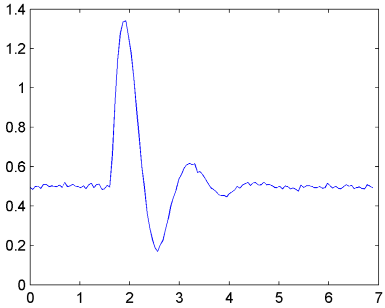
Simulare, 330 de eşantioane cu perioada de eşantionare ≈ 0.053.



Din nou avem condiţii iniţiale nenule, şi ca de obicei zgomot de măsurare.

Vom folosi primul impuls pentru identificare şi celelalte două pentru validare.

Exemplu: Valori staţionare şi factor de proporţionalitate

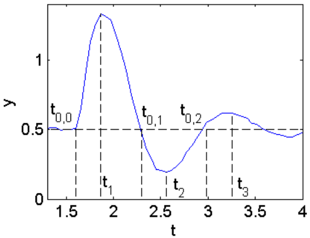


Avem $u_0 = u_{ss} = 2$.

Determinăm ieşirea staţionară (egală cu cea iniţială) prin efectuarea mediei ultimelor 11 eşantioane:

$$y_{ss} = y_0 \approx \frac{1}{11} \sum_{k=120}^{130} y(k) \approx 0.5$$

Exemplu: Factor de amortizare



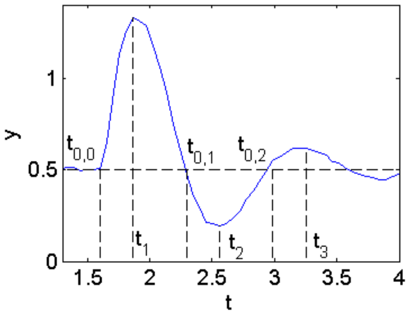
Citim $t_{0,0} \approx 1.6$, $t_{0,1} \approx 2.3$, $t_{0,3} \approx 2.99$. Trebuie ţinut cont că impulsul este aplicat la timpul $t_{0,0} \neq 0$. Reamintim – ariile sunt estimate numeric:

$$A_+ = \int_{t_{0,0}}^{t_{0,1}} (y(t) - y_0)dt \boxed{\approx T_s \sum_{k=k_{0,0}}^{k_{0,1}} (y(k) - y_0)} \approx 0.34$$

$$A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(t))dt \boxed{\approx T_s \sum_{k=k_{0,1}}^{k_{0,2}} (y_0 - y(k))} \approx 0.12$$

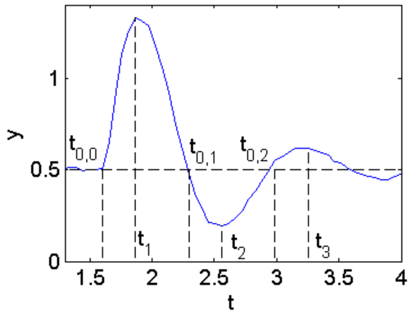
unde $k_{0,0}$, $k_{0,1}$, $k_{0,2}$ indicii eşantioanelor corespunzând la $t_{0,0}$, $t_{0,1}$, $t_{0,2}$.

Exemplu: Factor de amortizare (continuare)



Din aceste arii, $M = \frac{A_-}{A_+} \approx 0.36$, şi $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 1/M}} \approx 0.31$.

Exemplu: Perioada de oscilaţie



Citim $t_1 \approx 1.92$ şi $t_3 \approx 3.2$, ducând la $T_0 = 1.28$. De aici, $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0\sqrt{1-\xi^2}} \approx 5.16$.

Exemplu: Modelul ca funcţie de transfer

$$\widehat{K} = 0.25$$
$$\widehat{\xi} = 0.31$$
$$\widehat{\omega_n} = 5.16$$
$$\widehat{H}(s) = \frac{\widehat{K}\widehat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\widehat{\xi}\widehat{\omega}_n s + \widehat{\omega}_n^2} = \frac{6.64}{s^2 + 3.21s + 26.68}$$

Model în spaţiul stărilor pentru un sistem de ordinul 2

Reamintim că pentru a simula modelul din condiţii nenule, avem nevoie de un model în spaţiul stărilor $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$. Pornind de la $H(s)$ şi trecând în domeniul timp:

$$\ddot{y}(t) = -2\xi\omega_n\dot{y}(t) - \omega_n^2 y(t) + K\omega_n^2 u(t)$$

Luând $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ (fiindcă sistemul are ordinul 2), scriem:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2(t)\\ -2\xi\omega_n x_2(t) - \omega_n^2 x_1(t) + K\omega_n^2 u(t)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ K\omega_n^2\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 0u(t)$$

de unde se obţin imediat matricile A, B, C, D.

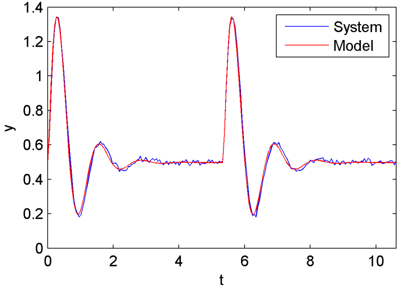
Înapoi la exemplu: Model (aproximat) în spaţiul stărilor

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -26.68 & -3.22 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6.64 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 0u(t)$$

unde x este vectorul de stare, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

Exemplu: Validare

Pentru a porni din condiţia iniţială nenulă, iniţializăm $x_1(0) = y_0, x_2(0) = 0$ la începutul simulării (pornim din regim staţionar, de aceea $x_2(0) = \dot{y}(0) = 0$).



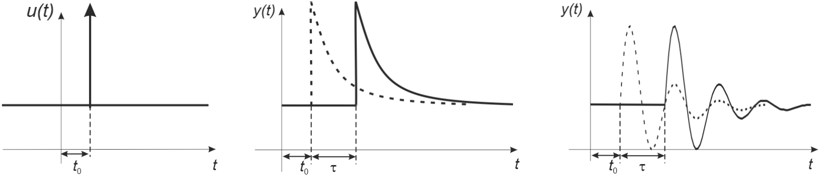
Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare:

$$J = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^2(k) \approx 8 \cdot 10^{-4}$$

Conţinut

Timp mort

Ca şi cel la treaptă, răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul 1 sau 2 cu timpul mort τ are forma tipică, dar după schimbarea intrării (care poate surveni la $t_0 \neq 0$) există o întârziere τ până când efectul se propagă la ieşire. Valoarea lui τ se citeşte direct pe grafic.



Funcţii de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts+1} e^{-s\tau}, \quad H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-s\tau}$$

Rezumat răspuns la impuls

- Răspuns la impuls = derivata răspunsului la treaptă.
- Factor de proporţionalitate K: ieşire / intrare în condiţii iniţiale nenule, altfel din valoarea maximă.
- Ordin 1: constanta de timp T găsită pe axa *timp* când axa *ieşire* atinge 36.8% din diferenţă.
- Ordin 2: perioada T_0 citită pe grafic, suprareglajul M calculat prin integrare numerică. Rezultă ξ, ω_n.
- Model în spaţiul stărilor pentru condiţii iniţiale diferite de zero.