Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu

Partea VI

Semnale de intrare

Motivare

Alegerea intrării este cel mai important element al proiectării experimentului

Toate metodele de identificare impun condiţii asupra semnalului de intrare, de exemplu:

- Analiza în domeniul timp necesită semnale treaptă sau impuls
- Analiza de corelaţie funcţionează de preferinţă cu intrări de tip zgomot alb
- ARX necesită intrări “suficient de informative”

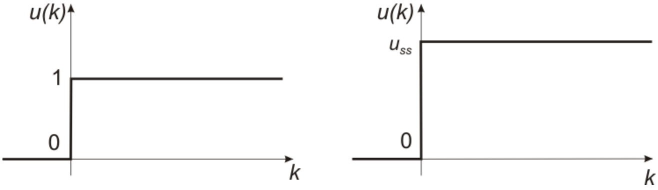
Plan

În această parte vom:

- Revizita semnale de intrare deja folosite
- Descrie câteva noi tipuri de intrări
- Explica proprietăţi ale intrărilor, importante în identificarea sistemelor
- Caracteriza semnalele discutate

Conţinut

Intrarea treaptă



Stânga: Treapta unitară:

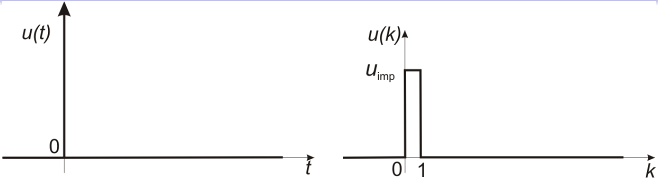
$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

Dreapta: Treaptă de amplitudine arbitrară:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ u_{ss} & k \geq 0 \end{cases}$$

Observaţie: Reformulări în timp discret ale variantelor continue.

Intrarea impuls



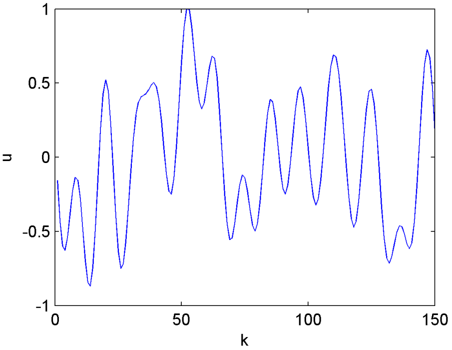
Reamintim că în timp discret, nu putem aproxima cum dorim impulsul ideal (stânga), fiindcă semnalul nu poate să se schimbe decât la momentele de eşantionare.

Dreapta: Realizarea în timp discret a impulsului:

$$u(k) = \begin{cases} u_{\mathrm{imp}} & k = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

- Când $u_{\mathrm{imp}} = \frac{1}{T_s}$, integrala semnalului este 1 şi obţinem o aproximare a impulsului ideal.
- Când $u_{\mathrm{imp}} = 1$ (de ex. în analiza de corelaţie), obţinem un impuls "unitar" în timp discret.

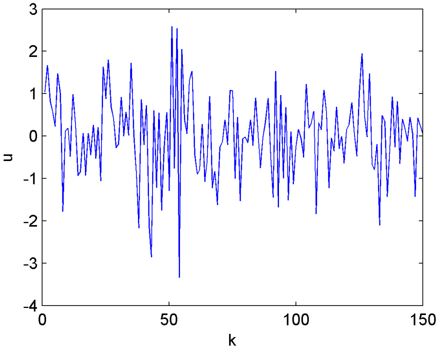
Sumă de sinusuri (multisinus)



$$u(k) = \sum_{j=1}^{m} a_j sin(\omega_j k + \varphi_j)$$

- a_j: amplitudinile celor m componente sinusoidale
- ω_j: frecvenţele, $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_m \leq \pi$
- φ_j: fazele

Zgomot alb

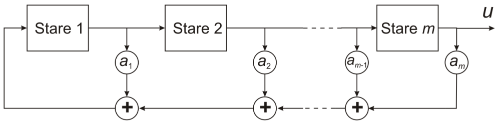


Reamintim zgomotul alb de medie zero: medie 0, semnal necorelat la paşi diferiţi de timp.

În figură, valorile au fost eşantionate independent dintr-o distribuţie Gaussiană de medie zero.

Conţinut

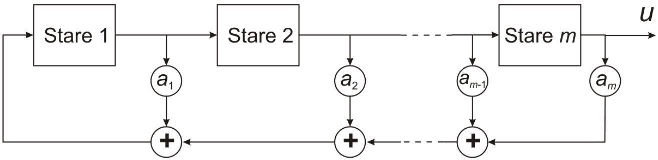
Semnal pseudo-aleator binar (SPAB)



Semnal care comută între două valori discrete, generate cu un algoritm specific.

Interesant fiindcă aproximează zgomotul alb, şi primeşte aşadar anumite proprietăţi utile ale acestuia (detaliate matematic mai târziu).

Generator SPAB



SPAB poate fi generat cu un registru de deplasare cu reacţie liniară (en. *linear shift feedback register*, LSFR), reprezentat în figură. Toate semnalele şi toţi coeficienţii sunt binari (stările sunt biţi).

La fiecare pas discret $k \geq 0$:

- Starea x_i se deplasează în starea x_{i+1}.
- Starea x_1 este calculată prin adunare modulo 2 a stărilor de pe calea de reacţie (dacă $a_i = 1$ atunci x_i se adună, dacă $a_i = 0$ atunci nu).
- Ieşirea $u(k)$ este extrasă din starea x_m.

Observaţie: un astfel de registru este uşor de implementat în hardware.

Adunarea modulo 2

Formula/tabelul de adevăr al adunării modulo 2:

$$p \oplus q = \begin{cases} 0 & \text{if } p = 0, q = 0 \\ 1 & \text{if } p = 0, q = 1 \\ 1 & \text{if } p = 1, q = 0 \\ 0 & \text{if } p = 1, q = 1 \end{cases}$$

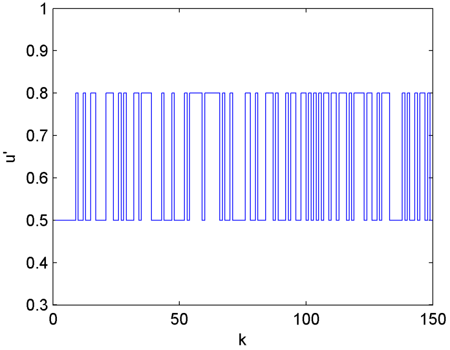
...se numeşte şi XOR (SAU exclusiv, en. *eXclusive OR*)

SPAB cu valori arbitrare

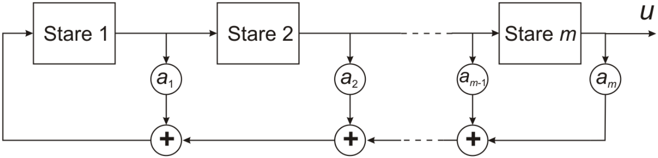
Pentru a obţine un semnal $u'(k)$ care ia valorile b, c în loc de $0, 1$, deplasăm şi scalăm semnalul original $u(k)$:

$$u'(k) = b + (c - b)u(k)$$

Exemplu pentru $b = 0.5$, $c = 0.8$:



Reprezentare în spaţiul stărilor



$$
\boxed{
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= a_1x_1(k) \oplus a_2x_2(k) \oplus \cdots \oplus a_mx_m(k) \\
x_2(k+1) &= x_1(k) \\
&\vdots \\
x_m(k+1) &= x_{m-1}(k) \\
u(k) &= x_m(k)
\end{aligned}
}
$$

Notăm cu $x(k) = [x_1(k), \ldots, x_m(k)]^\top$ vectorul de stare, conţinând m variabile (biţi)

Reprezentare în spaţiul stărilor: Formă matriceală

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes x(k) =: A \otimes x(k)$$

$$u(k) = [0\ 0\ \dots\ 0\ 1]x(k) =: Cx(k)$$

unde $k \geq 0$, şi $\otimes$ indică faptul că adunările din înmulţirea matriceală se efectuează modulo 2.

Perioada SPAB

- Algoritmul SPAB este determinist, deci starea curentă $x(k)$ determină exact stările şi ieşirile ulterioare

$\Rightarrow$ Perioada (numărul de paşi după care semnalul se repetă) este cel mult 2^m

- Starea identic nulă nu este de dorit, fiindcă secvenţa ulterioară ar rămâne tot timpul 0

$\Rightarrow$ Perioada maximă practică este $P = 2^m - 1$

Un SPAB cu perioada $P = 2^m - 1$ se numeşte SPAB de lungime maximă.

Acest tip de SPAB are proprietăţi interesante, fiind preferat în aplicaţii.

SPAB de lungime maximă

Perioada este determinată de coeficienţii de reacţie a_i.

Următorii coeficienţi trebuie să fie 1 pentru a obţine perioada maximă (toţi restul sunt 0):

m	Perioadă maximă $2^m - 1$	Coeficienţi egali cu 1
3	7	a_1, a_3
4	15	a_1, a_4
5	31	a_2, a_5
6	63	a_1, a_6
7	127	a_1, a_7
8	255	a_1, a_2, a_7, a_8
9	511	a_4, a_9
10	1023	a_3, a_{10}

Alte combinaţii valide de coeficienţi există, şi se pot găsi în literatură şi coeficienţi pentru numere mai mari de biţi m.

Funcţie Matlab

```
u = idinput(N, type, [], [b, c]);
```

Argumente:

1. `N`: lungimea semnalului (numărul de eşantioane discrete).
2. `type`: tipul semnalului, un string. Relevant pentru noi: `'prbs'` pentru PRBS, `'rgs'` pentru zgomot alb gaussian, `'sin'` pentru sumă de sinusuri.
3. Al treilea argument este banda de frecvenţe a semnalelor (poate rămâne la valoarea implicită, matrice vidă).
4. `[b, c]`: limitele semnalului, inferioară şi superioară. Pentru zgomot gaussian, $[b, c]$ este media $\pm$ o abatere standard.

Observaţie: `N` poate fi configurat pentru a genera intrări multiple (vezi documentaţia Matlab pentru detalii).

Conţinut

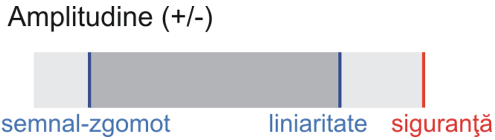
Alegerea formei intrării

Anumite metode de identificare necesită tipuri specifice de intrări:

- Analiza în domeniul timp necesită semnale treaptă sau impuls
- Analiza de corelaţie funcţionează de preferinţă cu intrări de tip zgomot alb

Regulă practică: forma intrării, inclusiv alte caracteristici cum ar fi amplitudinea, trebuie să fie reprezentative pentru regimul tipic de operare al sistemului

Alegerea amplitudinii intrării



- Amplitudinea permisă a intrărilor este de obicei limitată de operatorul sistemului, din motive de siguranţă sau de cost
- Chiar dacă sunt permise, intrări prea mari pot duce sistemul în afara zonei de liniaritate, reducând performanţa metodelor liniare de identificare
- Dar intrările prea mici vor duce la semnale dominate de zgomot şi perturbaţii

Alegerea perioadei de eşantionare

Pentru mai toate metodele, lucrăm în timp discret, şi trebuie aşadar să alegem o perioadă de eşantionare T_s

- Perioade prea mari nu vor modela dinamica relevantă a sistemului. Idee iniţială: 10% din constanta de timp dominantă
- Perioade prea mici vor duce la efecte prea mari ale zgomotelor şi perturbaţiilor
- Dacă nu suntem siguri, vom lua T_s mai mic

Datorită teoremei Nyquist-Shannon, ştim că nu pot fi recuperate frecvenţe ale semnalului mai mari de $1/(2T_s)$, aşadar putem să adresăm zgomotul şi alte efecte trecând ieşirile (şi intrările, dacă sunt măsurate) printr-un filtru trece-jos care elimină frecvenţele peste $1/(2T_s)$

Medie şi covarianţă

Dat fiind un semnal aleator $u(k)$, media şi covarianţa sa sunt:

$$\mu = \mathrm{E}\left\{u(k)\right\}$$
$$r_u(\tau) = \mathrm{E}\left\{[u(k+\tau) - \mu][u(k) - \mu]\right\}$$

Observaţii:

- Reamintim media şi covarianţa variabilelor aleatoare
- Am folosit aceeaşi funcţie de covarianţă $r_u(\tau)$ în analiza de corelaţie, unde am presupus că media μ este deja zero
- Intrările de medie zero pot funcţiona mai bine şi pentru alte metode, cum ar fi ARX

Medie şi covarianţă: semnal determinist

Dacă semnalul este determinist (de ex. SPAB), atunci media şi covarianţa se redefinesc:

$$\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k)$$

$$r_u(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [u(k+\tau) - \mu][u(k) - \mu]$$

Observaţie: $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cdot$ este egală cu $\mathrm{E}\left\{\cdot\right\}$ pentru un semnal aleator.

Persistenţa excitaţiei (PE)

Chiar şi metodele care nu au nevoie de o formă specifică a răspunsului impun condiţii: de ex. am spus că ARX necesită un $u(k)$ "suficient de informativ", fără a descrie matematic această condiţie

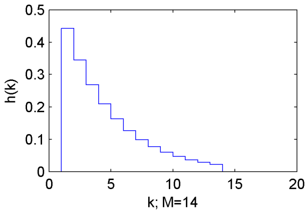
Condiţia poate fi descrisă precis folosind o proprietate tehnică numită persistenţa excitaţiei

PE: Exemplu de motivare

Vom dezvolta o variantă *idealizată* a analizei de corelaţie. Această metodă este doar un pas intermediar pentru motivarea proprietăţii de PE, iar proprietatea va fi utilă în mulţi algoritmi de identificare.

Model de tip răspuns finit la impuls (FIR):

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + v(k)$$



Analiza de corelaţie: Covarianţe

Presupunând că $u(k)$, $y(k)$ sunt de medie zero, valorile medii nu trebuiesc eliminate, şi covarianţele sunt:

$$r_u(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k+\tau)u(k)$$

$$r_{yu}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k+\tau)u(k)$$

Covarianţele trebuie estimate în practică din seturi finite de date, dar aici vom lucra cu valorile lor idealizate (rămânând în contextul exemplului de motivare, care nu va trebui de fapt implementat).

Analiza de corelaţie: Identificarea modelului FIR

Scriind M ecuaţii pentru a găsi parametrii FIR, avem:

$$\begin{bmatrix} r_{yu}(0) \\ r_{yu}(1) \\ \vdots \\ r_{yu}(M-1) \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(M-1) \\ r_u(1) & r_u(0) & \dots & r_u(M-2) \\ \vdots & & & \\ r_u(M-1) & r_u(M-2) & \dots & r_u(0) \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}$$

Putem lua numărul de ecuaţii egal cu cel al parametrilor fiindcă suntem în cazul ideal, fără zgomot, deci nu există pericol de supraantrenare.

Vom nota matricea din ecuaţie cu $R_u(M)$, matricea de covarianţă a intrării.

PE: definiţie matematică

Definiţie

Un semnal $u(k)$ are ordinul n de persistenţă a excitaţiei dacă $R_u(n)$ este pozitiv definită.

O matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este pozitiv definită dacă $h^\top A h > 0$ pentru orice vector nenul $h \in \mathbb{R}^n$. De notat că A trebuie să fie inversabilă.

Exemple:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ este pozitiv definită. Luăm $h = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, atunci $h^\top A h = a^2 + b^2$.
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ nu este pozitiv definită. Exemplu: $h = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$, $h^\top A h = -2a^2$.

PE în analiza de corelaţie

Dacă ordinul de PE este M, atunci $R_u(M)$ este pozitiv definită, deci inversabilă, şi sistemul liniar din analiza de corelaţie poate fi rezolvat pentru a găsi un FIR de lungime M.

Aşadar, ordinul de PE M înseamnă că se poate identifica un FIR de lungime M (se pot găsi M parametri).

Rolul general al PE

Pe lângă FIR, PE are un rol important în *toate* metodele parametrice de identificare, printre care ARX şi alte pe care le vom discuta în cursurile următoare, de ex. metodele erorii de predicţie şi variabilelor instrumentale.

Un ordin de PE suficient de mare este necesar pentru a identifica parametrii.

De obicei, ordinul de PE necesar este un multiplu (de ex. 2) al numărului de parametri n care trebuiesc estimaţi.

Alternative pentru covarianţă

În cele ce urmează, vom folosi următoarea definiţie mai simplă a covarianţei:

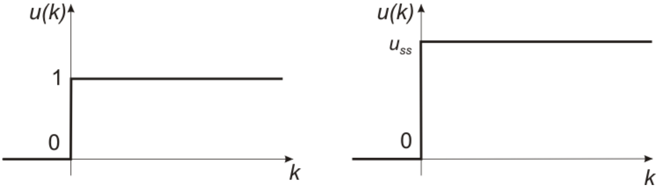
$$\boxed{r_u(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k+\tau)u(k)}$$

chiar atunci când media semnalului u este nonzero. Chiar dacă în acel caz r_u nu mai este covarianţa corectă dpdv statistic, funcţia rămâne utilă.

Pentru semnale de medie nonzero, definiţia simplificată de mai sus va duce la un ordin de PE mai mare cu 1 decât cel obţinut cu funcţia de covarianţă calculată cu scăderea valorii medii.

Conţinut

Intrare treaptă



Considerăm treapta mai generală, non-unitară:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ u_{ss} & k \geq 0 \end{cases}$$

Intrare treaptă: Medie şi covarianţă

Medie şi covarianţă:

$$\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k) = u_{ss}$$

$$r_u(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k+\tau)u(k) = u_{ss}^2$$

De notat că semnalul porneşte de la $k = 0$, deci suma este modificată corespunzător (acest lucru nu influenţează rezultatul final).

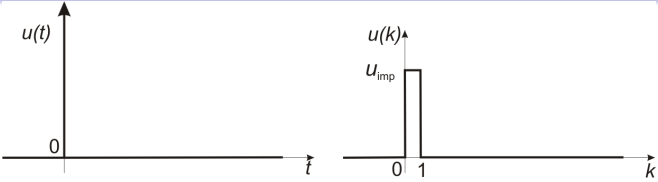
Intrare treaptă: Ordin de PE

Matrice de covarianţă:

$$R_u(n) = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ r_u(1) & r_u(0) & \dots & r_u(n-2) \\ \vdots & & & \\ r_u(n-1) & r_u(n-2) & \dots & r_u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ss}^2 & u_{ss}^2 & \dots & u_{ss}^2 \\ u_{ss}^2 & u_{ss}^2 & \dots & u_{ss}^2 \\ \vdots & & & \\ u_{ss}^2 & u_{ss}^2 & \dots & u_{ss}^2 \end{bmatrix}$$

Matricea are rangul 1, deci treapta are ordinul de PE egal cu 1.

Intrare impuls



Reamintim realizarea în timp discret:

$$u(k) = \begin{cases} \frac{1}{T_s} & k = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

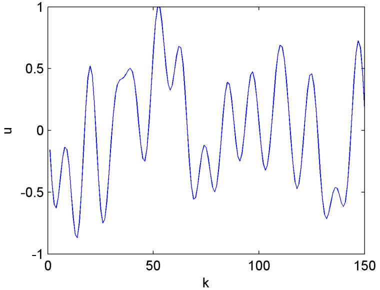
Medie şi covarianţă:

$$\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k) = 0$$

$$r_u(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k+\tau)u(k) = 0$$

$\Rightarrow R_u(n)$ matrice zero, impulsul are ordinul de PE egal cu zero.

Sumă de sinusuri



$$u(k) = \sum_{j=1}^{m} a_j sin(\omega_j k + \varphi_j), \quad 0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n \leq \pi$$

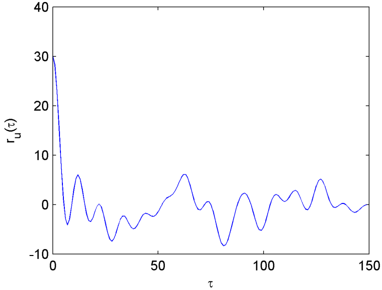
Medie şi covarianţă:

$$\mu = \begin{cases} a_1 sin(\varphi_1) & \text{dacă } \omega_1 = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

$$r_u(\tau) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{a_j^2}{2} \cos(\omega_j \tau) + \begin{cases} a_m^2 \sin^2 \varphi_m & \text{dacă } \omega_m = \pi \\ \frac{a_m^2}{2} \cos(\omega_m \tau) & \text{altfel} \end{cases}$$

Sumă de sinusuri (continuare)

Pentru multisinusul exemplificat pe slide-ul anterior, funcţia de covarianţă este:



Un multisinus cu m componente are ordin de PE egal cu n unde:

$$n = \begin{cases} 2m & \text{dacă } \omega_1 \neq 0, \omega_m \neq \pi \\ 2m - 1 & \text{dacă } \omega_1 = 0 \text{ sau } \omega_m = \pi \\ 2m - 2 & \text{dacă } \omega_1 = 0 \text{ şi } \omega_m = \pi \end{cases}$$

Zgomot alb: Medie şi covarianţă

Luăm un zgomot alb de medie zero, cu varianţa σ^2, de ex. eşantionat independent dintr-o distribuţie Gaussiană:

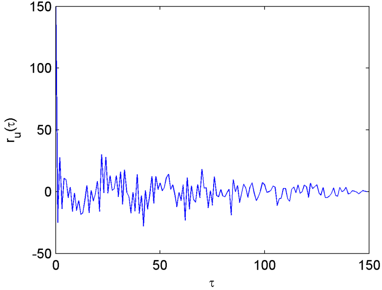
$$u(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Atunci, prin definiţie:

$$\mu = 0$$
$$r_u(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{dacă } \tau = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Zgomot alb: Exemplu de covarianţă

Funcţia de covarianţă a semnalului zgomot alb exemplificat anterior:



Zgomot alb: Ordin de PE

Matrice de covarianţă:

$$R_u(n) = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ r_u(1) & r_u(0) & \dots & r_u(n-2) \\ \vdots & & & \\ r_u(n-1) & r_u(n-2) & \dots & r_u(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n$$

unde I_n = matricea identitate, pozitiv definită. $\Rightarrow R_u(n)$ pozitiv definită pentru orice n — zgomotul alb are orice ordin n de PE.

Întrebare

Dată fiind concluzia de mai sus, de ce preferă analiza de corelaţie semnalul de intrare de tip zgomot alb pentru a identifica modelul FIR?

SPAB: Medie

Luăm un SPAB de lungime maximă cu valorile $0, 1$ generat folosind m biţi: perioada $P = 2^m - 1$, un număr mare.

Starea registrului LSFR $x(k)$ va conţine toate valorile binare posibile cu m cifre, cu excepţia valorii identic 0.

Semnalul $u(k)$ este ultima poziţie din $x(k)$, care ia valoarea 1 de 2^{m-1} ori, şi valoarea 0 de $2^{m-1} - 1$ ori.

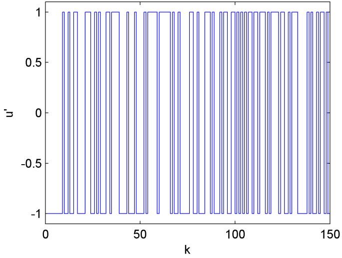
$\Rightarrow$ Valoare medie:

$$\mu = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} u(k) = \frac{1}{P} 2^{m-1} = \frac{(P+1)/2}{P} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2P} \approx \frac{1}{2}$$

unde aproximarea este precisă pentru P mare.

SPAB: Covarianţă

Luăm un SPAB de medie zero, scalat între $-b$ şi b:



$$u'(k) = -b + 2bu(k)$$

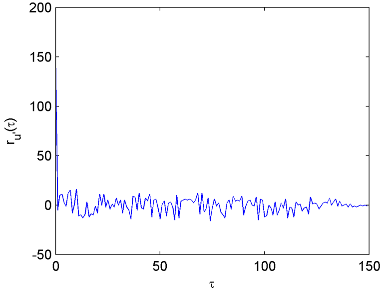
Atunci:

$$\mu = -b + 2b(\frac{1}{2} + \frac{1}{2P}) = \frac{b}{P} \approx 0$$

$$r_u(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{P^2} \approx 1 & \text{dacă } \tau = 0 \\ -\frac{1}{P} - \frac{1}{P^2} \approx -\frac{1}{P} \approx 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

SPAB: Exemplu de covarianţă

Funcţia de covarianţă a semnalului SPAB de pe slide-ul anterior:



Aşadar, SPAB se comportă similar cu zgomotul alb (are o funcţie de covarianţă similară). Împreună cu generarea lor uşoară, această proprietate face semnalele de tip SPAB foarte utile în identificarea sistemelor.

SPAB: Ordin de PE

Un SPAB de lungime maximă are ordinul de PE egal cu P, perioada (şi nu mai mare).

Exerciţiu

Luaţi o valoare $P \geq 2$ relativ mică şi, folosind formula pentru covarianţa semnalului SPAB, demonstraţi că acest semnal are ordinul de PE egal cu P.
Indiciu: construiţi matricea $R_u(n)$ pentru $n = P$ şi arătaţi ca are rangul P, apoi pentru $n > P$ şi arătaţi că are *tot* rangul P. Se poate demonstra că primele P coloane generează printr-o combinaţie liniară restul coloanelor $P + 1, P + 2, \ldots$.

Rezumat

- Semnale de intrare uzuale: treaptă, impuls, multisinus, zgomot alb de medie zero, semnal pseudo-aleator binar
- Detalii SPAB: generare cu LSFR, perioadă maximă
- Selecţia amplitudinii intrării şi perioadei de eşantionare
- Media şi covarianţa semnalelor de intrare
- Ordinul de persistenţă a excitaţiei
- Caracterizarea mediei, covarianţei, şi ordinului de PE pentru toate semnalele uzuale