Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu

Partea IV

Analiza de corelaţie

Motivaţie 1

De ce alte metode pe lângă de analiza în domeniul timp?

Analiza în domeniul timp a răspunsurilor la treaptă şi impuls:

- Se poate aplica doar pentru câteva valori ale ordinului sistemului
- Trebuie de obicei efectuată (semi-)manual
- Produce un model imprecis, euristic al sistemului

Metodele de identificare pe care le vom discuta mai departe:

- Funcţionează pentru orice ordin al sistemului
- Furnizează algoritmi automaţi, complet implementabili
- Garantează acurateţea soluţiei (în anumite condiţii tehnice)

Motivaţie 2

De ce analiza de corelaţie?

- Cea mai apropiată de analiza în domeniul timp (modelul este răspunsul la impuls)
- Model “cu adevărat” neparametric
- O metodă “simplă” din rândul tehnicilor generale de identificare

Clasificare

Reamintim taxonomia modelelor din Partea I:

După numărul de parametri:

1. Modele parametrice: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut şi de obicei mic de parametri
2. Modele neparametrice: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri
   Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

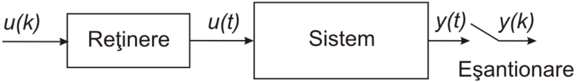
După cunoştinţele disponibile în avans ("culoare"):

1. Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
2. Modele cutie neagră: complet necunoscute în avans
3. Modele cutie gri: parţial cunoscute

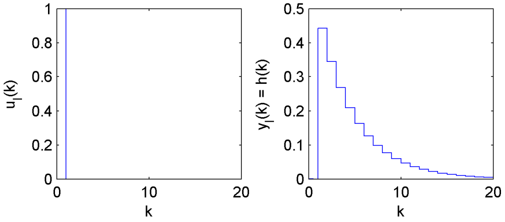
Analiza de corelaţie este o metodă cu adevărat neparametrică; produce un *model sub formă de răspuns la impuls*.

Conţinut

Reamintim: model în timp discret



Răspunsul discret la impuls



Semnal impuls unitar în timp discret:

$$u_{\mathrm{I}}(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

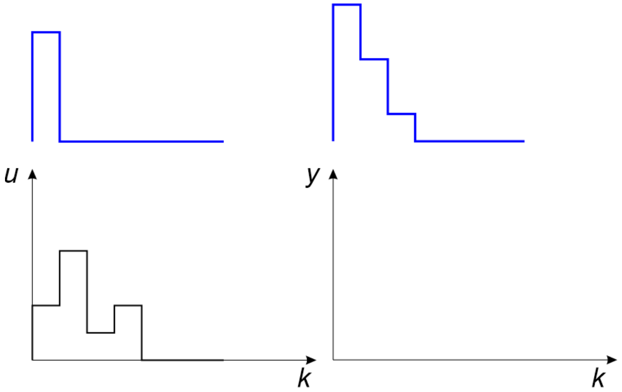
(nu are aria 1, fiind aşadar diferit de realizarea în timp discret a impulsului continuu!)

Răspuns discret la impuls:

$$y_I(k) = h(k), \quad k \geq 0$$

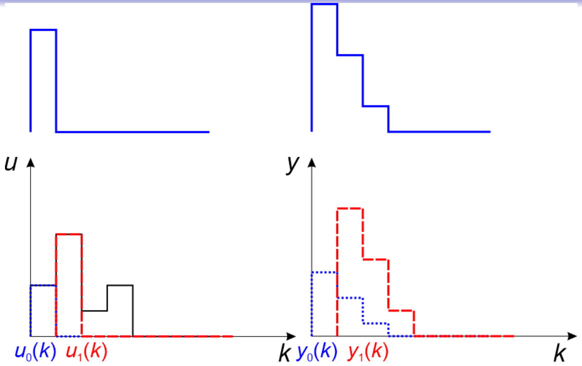
$h(k), k \geq 0$ se numeşte şi funcţia pondere a sistemului.

Model răspuns la impuls: Problemă



Se dă o intrare în timp discret $u(k)$. Obiectivul este găsirea ieşirii rezultante $y(k)$.

Model răspuns la impuls: Descompunerea intrării



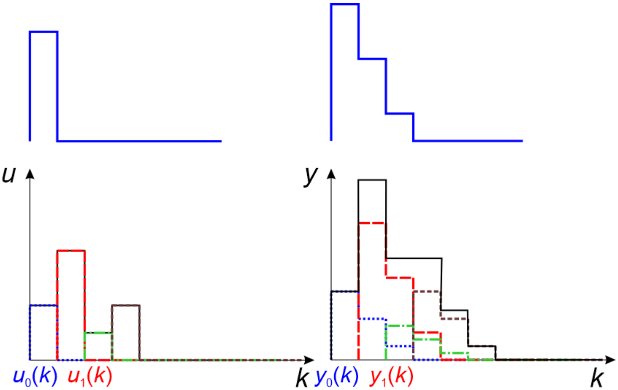
Luăm semnalul $\tilde{u}_j(k)$ egal $u(j)$ at $k = j$, şi 0 în rest; $\tilde{u}_j(k)$ este o versiune deplasată şi scalată a impulsului unitar:

$$\tilde{u}_j(k) = u(j)u_{\mathrm{I}}(k - j)$$

Răspunsul la $\tilde{u}_j(k)$ este aşadar o versiune deplasată şi scalată a răspunsului la impuls:

$$\tilde{y}_j(k) = u(j)h(k - j)$$

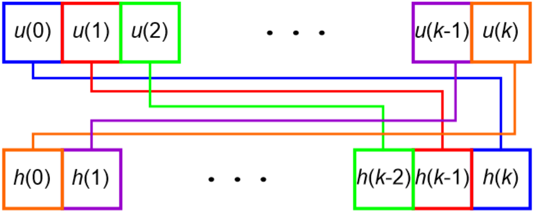
Model răspuns la impuls: Superpoziţie



Dar $u(k)$ = superpoziţia mai multor semnale $\tilde{u}_j$, şi datorită liniarităţii:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} \tilde{y}_j(k) = \sum_{j=0}^{k} u(j)h(k-j)$$

Model răspuns la impuls: Convoluţie



$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} \tilde{y}_j(k) = \sum_{j=0}^{k} u(j)h(k-j) = \sum_{j=0}^{k} h(j)u(k-j) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j)$$

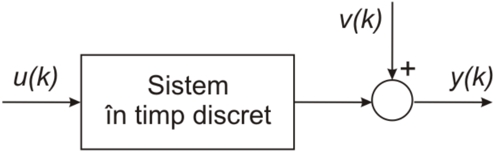
unde am presupus condiţii iniţiale zero, i.e. $u(j) = 0 \forall j < 0$.

Model de tip răspuns la impuls

Răspunsul la o intrare arbitrară $u(k)$ este *convoluţia* intrării cu răspunsul discret la impuls:

$$\boxed{y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j) + v(k)}$$

unde am inclus pe lângă modelul ideal şi o componentă de perturbaţie $v(k)$.



Ipoteze

Ipoteze

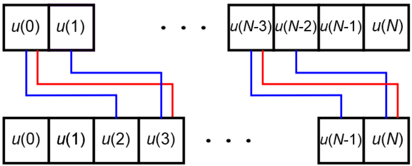
1. Intrarea $u(k)$ este un proces stohastic staţionar.
2. Intrarea $u(k)$ şi perturbaţia $v(k)$ sunt independente.

Reamintim:

- Independenţa variabilelor aleatoare.
- Proces stohastic staţionar: aceeaşi medie la orice moment de timp, covarianţa depinde doar de diferenţa între paşii de timp.

Funcţia de covarianţă a intrării

$$r_u(\tau) = r_u(-\tau) = \mathrm{E}\left\{u(k+\tau)u(k)\right\} \left(= \frac{1}{\#} \sum_k u(k+\tau)u(k) \right)$$



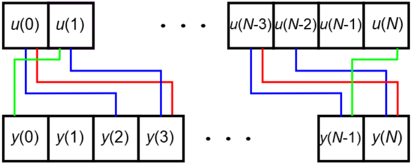
De exemplu:

$$r_u(2) = r_u(-2) = \mathrm{E}\left\{u(k+2)u(k)\right\}$$
$$r_u(3) = r_u(-3) = \mathrm{E}\left\{u(k+3)u(k)\right\}$$

Observaţie: r_u este simetrică.

Funcţia de covarianţă intrare-ieşire

$$r_{yu}(\tau) = \mathrm{E}\left\{y(k+\tau)u(k)\right\} \quad \left(= \frac{1}{\#}\sum_k y(k+\tau)u(k)\right)$$



De exemplu:

$$r_{yu}(2) = \mathrm{E}\left\{y(k+2)u(k)\right\} = \frac{1}{\#}\sum_k y(k+2)u(k)$$

$$r_{yu}(3) = \mathrm{E}\left\{y(k+3)u(k)\right\}$$

$$r_{yu}(-1) = \mathrm{E}\left\{y(k-1)u(k)\right\} = \mathrm{E}\left\{y(k)u(k+1)\right\}$$

Observaţie: r_{yu}, r_u sunt covarianţele adevărate doar dacă intrarea şi ieşirea sunt de medie zero. Dacă această condiţie nu este satisfăcută, mediile nonzero trebuiesc eliminate din semnale.

Relaţia între covarianţe şi răspunsul la impuls

Dacă nu ar exista perturbaţii, atunci:

$$
\begin{aligned}
r_{yu}(\tau) &= \mathrm{E}\left\{y(k+\tau)u(k)\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[\sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k+\tau-j)\right]u(k)\right\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} h(j)\mathrm{E}\left\{u(k+\tau-j)u(k)\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(\tau-j)
\end{aligned}
$$

Erorile generate de perturbaţii sunt tratate implicit mai târziu, folosind regresia liniară.

Identificarea răspunsului la impuls

Scriem ecuaţia covarianţelor pentru toate valorile τ:

$$r_{yu}(0) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) r_u(-j) = h(0)r_u(0) + h(1)r_u(-1) + h(2)r_u(-2) + \dots$$

$$r_{yu}(1) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) r_u(1-j) = h(0)r_u(1) + h(1)r_u(0) + h(2)r_u(-1) + \dots$$

$$\dots$$

obţinând (în principiu) un sistem infinit de ecuaţii liniare:

- Coeficienţii sunt $r_u(\tau)$, $r_{yu}(\tau)$.
- Necunoscutele sunt $h(0), h(1), \dots$: soluţia sistemului.

Structura sistemului liniar

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) r_u(-j) = h(0) r_u(\tau) + h(1) r_u(\tau - 1) + h(2) r_u(\tau - 2) + \ldots$$

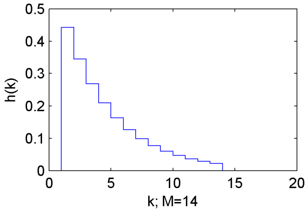
$$r_u(0) \quad r_u(1) \quad r_u(2) \quad r_u(3) \quad \cdots$$

$$\begin{bmatrix} r_{yu}(0) \\ r_{yu}(1) \\ r_{yu}(2) \\ r_{yu}(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \cdots & & & \\ r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \cdots & & \\ r_u(2) & r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \cdots & \\ r_u(3) & r_u(2) & r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \cdots \\ \vdots & & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Urmează un algoritm practic, ce foloseşte un set finit de date.

Conţinut

Modelul răspuns finit la impuls



Impunem condiţia $h(k) = 0$ pentru $k \geq M$. Obţinem modelul de tip răspuns finit la impuls (en. *finite impulse response*, FIR):

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + v(k)$$

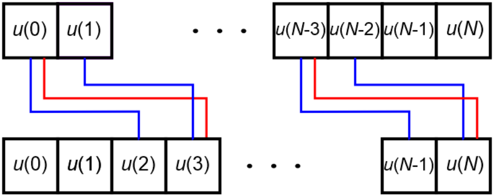
De notat: M trebuie selectat pentru a avea $MT_s \gg$ constantele de timp dominante (sistemul să fie aproape în regim staţionar)

Obţinerea covarianţelor din date: r_u

Se dau semnalele $u(k), y(k)$, unde $k = 0, \dots, N$.
Pentru valori pozitive τ, avem:

$$\begin{aligned} r_u(\tau) &= \mathrm{E}\left\{u(k+\tau)u(k)\right\} \\ &\approx \boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-\tau} u(k+\tau)u(k)} \\ &=: \widehat{r}_u(\tau), \qquad \forall \tau \geq 0 \end{aligned}$$

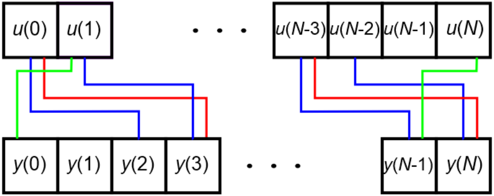
şi $\widehat{r}_u(-\tau) = \widehat{r}_u(\tau)$ datorită simetriei.



Obţinerea covarianţelor din date: r_{yu}

Pentru valori τ pozitive şi negative:

$$
\begin{aligned}
r_{yu}(\tau) &= \mathrm{E}\left\{y(k+\tau)u(k)\right\} \\
&\approx \boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-\tau} y(k+\tau)u(k) & \text{dacă } \tau \geq 0 \\ \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=-\tau}^{N} y(k+\tau)u(k) & \text{dacă } \tau < 0 \end{cases}} \\
&=: \widehat{r}_{yu}(\tau), \qquad \forall \tau \geq 0
\end{aligned}
$$



Modelul răspuns finit la impuls

Model FIR:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + v(k)$$

Ecuaţia covarianţelor este trunchiată în acelaşi fel:

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)r_u(\tau - j)$$

Sistem liniar de ecuaţii

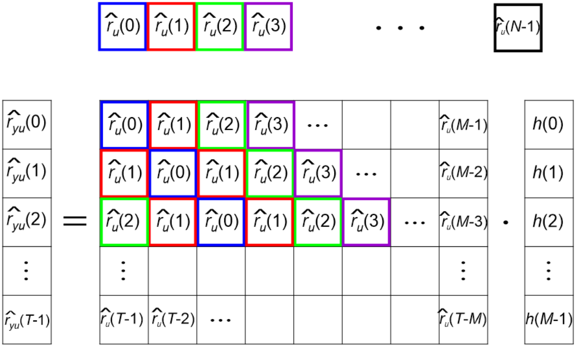
Folosind $\widehat{r}_{yu}$, $\widehat{r}_u$ estimate din date, scriem ecuaţiile trunchiate pentru $\tau = 0, \dots, T-1$ (ţinând cont că $\widehat{r}_u(-\tau) = \widehat{r}_u(\tau)$):

$$
\begin{aligned}
\widehat{r}_{yu}(0) &= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\widehat{r}_u(-j) \\
&= h(0)\widehat{r}_u(0) + h(1)\widehat{r}_u(1) + \ldots + h(M-1)\widehat{r}_u(M-1) \\
\widehat{r}_{yu}(1) &= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\widehat{r}_u(1-j) \\
&= h(0)\widehat{r}_u(1) + h(1)\widehat{r}_u(0) + \ldots + h(M-1)\widehat{r}_u(M-2) \\
\ldots \\
\widehat{r}_{yu}(T-1) &= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\widehat{r}_u(T-1-j) \\
&= h(0)\widehat{r}_u(T-1) + h(1)\widehat{r}_u(T-2) + \ldots + h(M-1)\widehat{r}_u(T-M)
\end{aligned}
$$

– un sistem liniar de T ecuaţii cu M necunoscute $h(0), \dots, h(M-1)$.

Sistem liniar: formă matriceală

$$
\begin{bmatrix} \hat{r}_{yu}(0) \\ \hat{r}_{yu}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yu}(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_u(0) & \hat{r}_u(1) & \dots & \hat{r}_u(M-1) \\ \hat{r}_u(1) & \hat{r}_u(0) & \dots & \hat{r}_u(M-2) \\ \vdots & & & \\ \hat{r}_u(T-1) & \hat{r}_u(T-2) & \dots & \hat{r}_u(T-M) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}
$$



Sistem liniar: Observaţii

Selecţia naivă $T = M$ ar furniza o soluţie exactă a sistemului, dar datorită zgomotului şi perturbaţiilor această soluţie ar fi supra-antrenată. Este aşadar necesar să avem $T > M$ (preferabil, $T \gg M$).

Putem acum aplica metodologia de regresie liniară (vezi Partea 3) pentru a rezolva problema.

Utilizarea modelului FIR

După ce sistemul a fost rezolvat obţinând ponderile estimate $\hat{h}$, prezicem ieşirea cu:

$$\boxed{\hat{y}(k) = \sum_{j=0}^{M-1} \hat{h}(j)u(k-j)}$$

Caz special: Intrare de tip zgomot alb

Considerăm cazul în care intrarea $u(k)$ este zgomot alb de medie zero.

Atunci, $r_u(\tau) = 0$ pentru orice $\tau \neq 0$ (zgomotul alb fiind necorelat), iar $r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) r_u(\tau - j)$ se reduce la:

$$r_{yu}(\tau) = h(\tau) r_u(0)$$

Rezultă algoritmul foarte simplu:

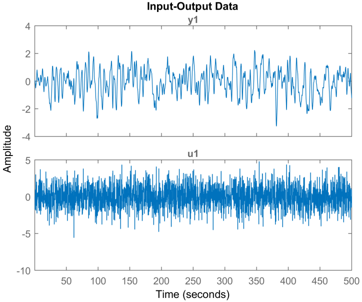
$$h(\tau) = \frac{\widehat{r}_{yu}(\tau)}{\widehat{r}_u(0)}$$

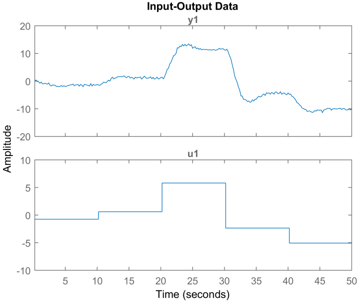
Conţinut

Date experimentale

Se dau următoarele seturi de date, separate pentru identificare şi validare.

`plot(id);` and `plot(val);`

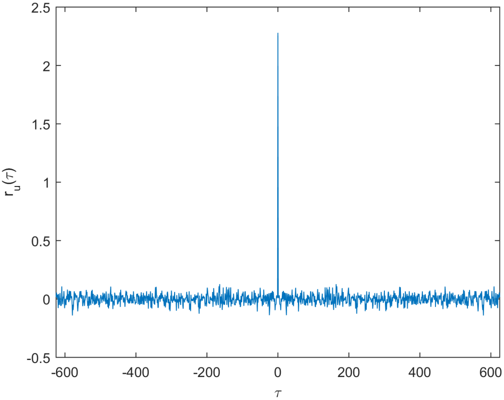




De notat că intrarea de identificare este zgomot alb, dar intrarea de validare nu este. Setul de identificare conţine 2500 de eşantioane. Observăm că semnalele sunt de medie zero.

Covarianţa intrării

`[c, tau] = xcorr(id.u);` and `plot(tau, c);`



Intrarea este zgomot alb.

Aplicarea analizei de corelaţie

`fir = cra(id, M, 0);` sau `fir = cra(id, M, 0, plotlevel);`

Argumentele funcţiei:

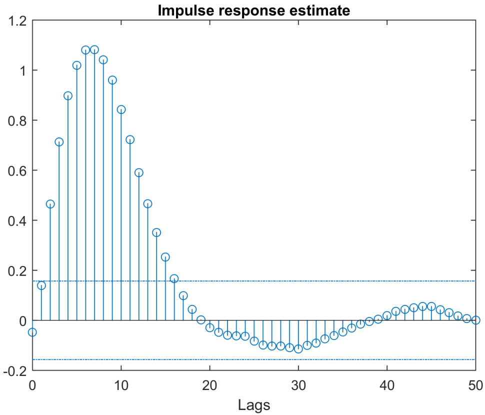
1. Datele de identificare.
2. Lungimea *M* a modelului de tip FIR, fixată aici la 45.
3. Al treilea argument egal cu 0 înseamnă ca nu se efectuează *albirea intrării*.

Tratarea intrărilor ne-ideale:

- Dacă intrarea nu are medie zero, setul de identificare trebuie trecut prin funcţia `detrend` pentru a scădea valorile medii din semnale.
- Dacă intrarea nu este zgomot alb, al treilea argument trebuie lăsat egal cu valoarea implicită (nespecificându-l, sau fixându-l egal cu o matrice vidă), ceea ce va duce la albirea semnalului de intrare.

Aplicarea analizei de corelaţie (continuare)

Implicit (sau când `plotlevel=1`) parametrii modelului FIR sunt reprezentaţi grafic împreună cu un interval de încredere de 99%.

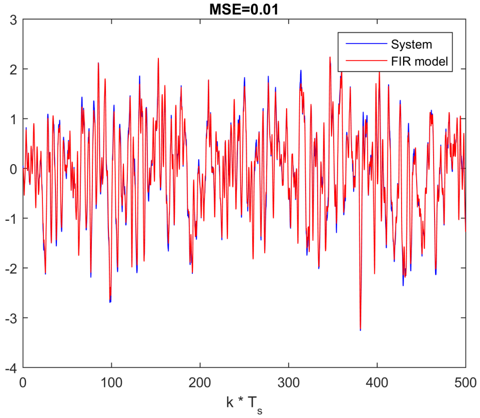


`plotlevel=2` reprezintă grafic de asemenea şi funcţiile de covarianţă.

Rezultate pe datele de identificare

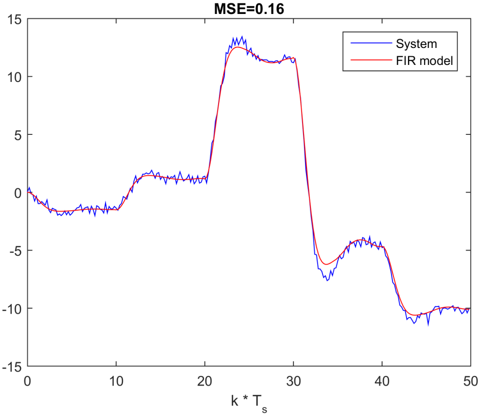
```
yhat = conv(fir, id.u); yhat = yhat(1:length(id.u));
```

Pentru a simula modelul FIR, trebuie efectuată *convoluţia* între parametrii FIR şi intrare. Ieşirea simulată este mai lungă decât este necesar, şi este aşadar trunchiată la lungimea corectă.



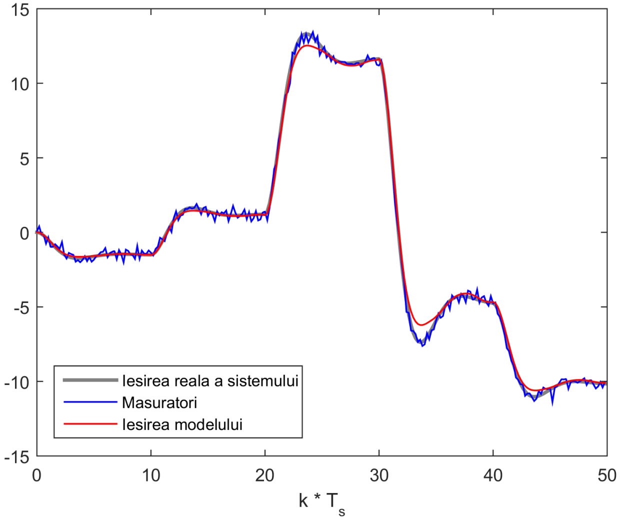
Validarea modelului FIR

```
yhat = conv(fir, val.u); yhat = yhat(1:length(val.u));
```



Rezultatele sunt rezonabile, dar nu excelente.

Detalii despre semnale



Alternativă: funcţia `impulseest`

`model = impulseest(id, M);` or `model = impulseest(id);`

Foloseşte un algoritm mai avansat decât cel studiat la curs.

Conţinut

Garanţie simplificată pentru intrare zgomot alb

Ipoteză adiţională

3. Intrarea $u(k)$ este zgomot alb de medie zero.

Teoremă

Pentru intrare de tip zgomot alb, valorile estimate $\widehat{h}(\tau)$ converg la valorile reale $h(\tau)$ când numărul de eşantioane N tinde la infinit.

Observaţie: Acest tip de rezultat, în care soluţia corectă este obţinută la limita numărului infinit de date, se numeşte *consistenţă*.

Rezumat

- Semnalul impuls unitar în timp discret, şi răspunsul discret la impuls h.
- Utilizarea răspunsului la impuls ca model: convoluţie cu intrarea u.
- Cazul ideal: Funcţiile de covarianţă şi sistemul liniar de ecuaţii în h.
- Analiza de corelaţie în practică:
  - covarianţe din date finite
  - răspunsul finit la impuls (FIR)
  - sistem de ecuaţii finit-dimensional
- Exemplu Matlab.
- Garanţie de acurateţe simplificată (consistenţă în limita datelor infinite).