

# Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3  
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu



## Partea VIII

Metoda variabilelor instrumentale.  
Identificarea în buclă închisă

# Conținut

- 1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanții de performanță
- 4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

# Clasificare

Reamintim taxonomia modelelor din Partea I:

După numărul de parametri:

- 1 **Modele parametrice**: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut și de obicei mic de parametri
- 2 Modele neparametrice: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri  
Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoștințele disponibile în avans (“culoare”):

- 1 Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
- 2 **Modele cutie neagră**: complet necunoscute în avans
- 3 Modele cutie gri: parțial cunoscute

Ca și metoda minimizării erorii de predicție, metoda variabilelor instrumentale produce modele *cutie neagră*, *parametrice*, polinomiale.

# Motivare

- Metoda ARX este simplă (regresie liniară), dar funcționează doar pentru clase limitate de perturbații
- MEP funcționează pentru orice perturbație (rezonabilă), dar este relativ complicată d.p.d.v. numeric

Putem găsi o metodă care combină ambele avantaje?

(rezervat) **Da! Metoda variabilelor instrumentale**

# Conținut

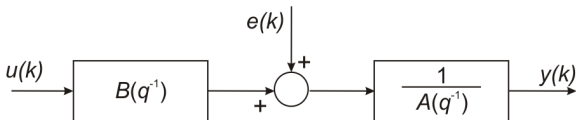
- 1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
  - Punct de start: ARX
  - Metoda variabilelor instrumentale
  - Comparație: VI versus MEP
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanții de performanță
- 4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

# Reamintim: modelul ARX

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

$$(1 + a_1q^{-1} + \dots + a_naq^{-na})y(k) =$$

$$(b_1q^{-1} + \dots + b_nbq^{-nb})u(k) + e(k)$$

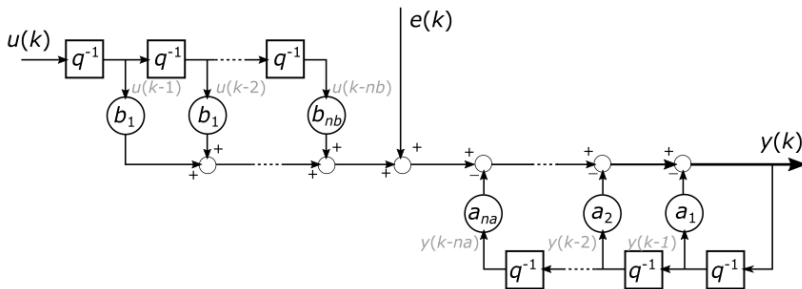


# ARX: Formă explicită și diagramă detaliată

În formă explicită:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) + e(k)$$

unde parametrii modelului sunt:  $a_1, a_2, \dots, a_{n_a}$  și  $b_1, b_2, \dots, b_{n_b}$ .





# Reprezentare pentru regresie liniară

$$\begin{aligned}
 y(k) &= [-y(k-1) \quad \cdots \quad -y(k-na) \quad u(k-1) \quad \cdots \quad u(k-nb)] \\
 &\quad \cdot [a_1 \quad \cdots \quad a_{na} \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{nb}]^T + e(k) \\
 &=: \varphi^T(k)\theta + e(k)
 \end{aligned}$$

**Vector de regresori:**  $\varphi \in \mathbb{R}^{na+nb}$ , valori precedente ale ieșirii și intrării.

**Vector de parametri:**  $\theta \in \mathbb{R}^{na+nb}$ , coeficienții.

## Problema de identificare și soluția

Dat fiind un set de date  $u(k), y(k), k = 1, \dots, N$ , trebuie găsit vectorul  $\theta$  care obține erori  $\varepsilon(k)$  minime în ecuația:

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + \varepsilon(k)$$

**Obiectiv matematic:** minimizarea erorii medii pătratice:

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k)^2$$

**Soluția:** poate fi scrisă în mai multe feluri, aici vom folosi:

$$\hat{\theta} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \right]$$

# Erorile parametrilor

Reamintim că pentru garanții, trebuie să existe un vector corect de parametri  $\theta_0$  astfel încât:

$$y(k) = \varphi^\top(k)\theta_0 + v(k)$$

Analizăm erorile din valorile parametrilor (un vector de  $n$  elemente):

$$\begin{aligned}\hat{\theta} - \theta_0 &= \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^\top(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \right] \\ &- \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^\top(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^\top(k) \right] \theta_0 \\ &= \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^\top(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)[y(k) - \varphi^\top(k)\theta_0] \right] \\ &= \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^\top(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)v(k) \right]\end{aligned}$$

## Ipoteze adiționale

Dorim ca algoritmul să fie consistent: erorile parametrilor trebuie să devină 0 la limită (și să fie bine definite), când numărul de date tinde la infinit.

Când  $N \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \rightarrow E \{ \varphi(k) \varphi^T(k) \}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v(k) \rightarrow E \{ \varphi(k) v(k) \}$$

Pentru ca eroarea să fie (1) bine definită și (2) egală cu zero, trebuie ca:

- 1  $E \{ \varphi(k) \varphi^T(k) \}$  inversabilă.
- 2  $E \{ \varphi(k) v(k) \}$  zero.

# Motivare: ARX necesită zgomot alb

- Avem  $E \{\varphi(k)v(k)\} = 0$  dacă elementele  $\varphi(k)$  sunt necorelate cu  $v(k)$  (presupunem că  $v(k)$  este de medie zero).
- Dar  $\varphi(k)$  include  $y(k-1), y(k-2), \dots$ , care depind de  $v(k-1), v(k-2), \dots$ !
- Deci singura alternativă:  $v(k)$  necorelat cu  $v(k-1), v(k-2), \dots$   
 $\Rightarrow v(k)$  trebuie să fie *zgomot alb*.

**Variabilele instrumentale** elimină această necesitate de zgomot alb.

# Conținut

- 1 **Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale**
  - Punct de start: ARX
  - **Metoda variabilelor instrumentale**
  - Comparație: VI versus MEP
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanții de performanță
- 4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

# Intuiție

$$\hat{\theta} - \theta_0 = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v(k) \right]$$

**Idee:** Ce ar fi să includem un alt vector decât  $\varphi(k)$  în produsul cu  $v(k)$ ?

$$\hat{\theta} - \theta_0 = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}(k) v(k) \right]$$

unde elementele lui  $\mathbf{Z}(k)$  sunt necorelate cu  $v(k)$ . Atunci  $E \{ \mathbf{Z}(k) v(k) \} = 0$  și eroarea poate fi zero.

Vectorul  $\mathbf{Z}(k)$  are  $n$  elemente, numite **instrumente**.

# Metoda variabilelor instrumentale

Pentru a avea:

$$\hat{\theta} - \theta_0 = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z(k) v(k) \right] \quad (8.1)$$

parametrii estimați trebuie să fie:

$$\hat{\theta} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z(k) y(k) \right] \quad (8.2)$$

Acest vector  $\hat{\theta}$  este soluția sistemului de  $n$  ecuații:

$$\left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z(k) [\varphi^T(k) \theta - y(k)] \right] = 0 \quad (8.3)$$

Construcția și rezolvarea acestui sistem duce la **metoda de bază a variabilelor instrumentale (VI)**.

**Exercițiu:** Arătați că (8.3) implică (8.2), și că (8.2) implică (8.1).



## VI simple

Până acum nu am discutat încă VI  $Z(k)$ . Ele sunt create de obicei folosind intrările (fiindcă includerea ieșirilor ar duce la corelare cu  $v$  și ar elimina avantajul metodei VI).

**O posibilitate simplă:** includem intrări precedente adiționale până obținem un vector de dimensiunea corectă,  $n = na + nb$ :

$$Z(k) = [u(k - nb - 1), \dots, u(k - na - nb), u(k - 1), \dots, u(k - nb)]^T$$

În comparație cu vectorul original:

$$\varphi(k) = [-y(k - 1), \dots, -y(k - na), u(k - 1), \dots, u(k - nb)]^T$$

**Întrebare:** De ce nu includem  $u(k - 1), \dots, u(k - na)$ ?

# Generalizare

Luăm  $na$  valori anterioare ale unei variabile instrumentale  $x$  arbitrare:

$$Z(k) = [-x(k-1), \dots, -x(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T$$

preluate de la ieșirea unei funcții de transfer cu intrarea  $u$ :

$$C(q^{-1})x(k) = D(q^{-1})u(k)$$

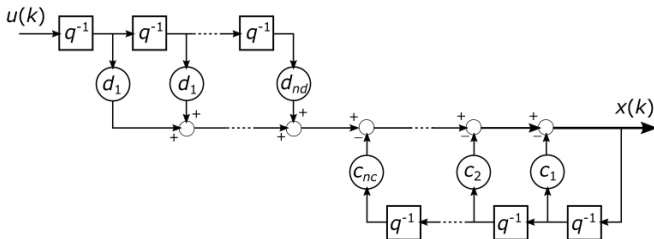
**Observație:**  $C(q^{-1})$ ,  $D(q^{-1})$  au semnificație diferită de cea din MEP.

# ARX: Formă explicită și diagramă detaliată

Formă explicită:

$$(1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc})x(k) = (d_1 q^{-1} + \dots + d_{nd} q^{-nd})u(k)$$

$$x(k) = -c_1 x(k-1) - c_2 x(k-2) - \dots - c_{nc} x(k-nc) + d_1 u(k-1) + d_2 u(k-2) + \dots + d_{nd} u(k-nd)$$



## VI simple = caz special al VI generalizate

Pentru a obține:

$$Z(k) = [u(k - nb - 1), \dots, u(k - na - nb), u(k - 1), \dots, u(k - nb)]^T$$

alegem  $C = 1$ ,  $D = -q^{-nb}$ .

**Exercițiu:** Verificați că VI dorite sunt într-adevăr obținute.

## VI generalizate: Model inițial

VI generalizate:

$$Z(k) = [-x(k-1), \dots, -x(k-na), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-nb)]^T$$

În comparație cu vectorul original:

$$\varphi(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T$$

**Idee:** Luăm funcția de transfer generatoare a VI egală cu un model inițial,  $C(q^{-1}) = \widehat{A}(q^{-1})$ ,  $D(q^{-1}) = \widehat{B}(q^{-1})$ . Acest model poate proveni de ex. dintr-o identificare ARX.

VI sunt o aproximare a ieșirii  $y$ :

$$Z(k) = [-\hat{y}(k-1), \dots, -\hat{y}(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T$$

dar care este *necorelată* cu zgomotul. Important:  $\hat{y}$  este ieșirea *simulată* a modelului!

# Conținut

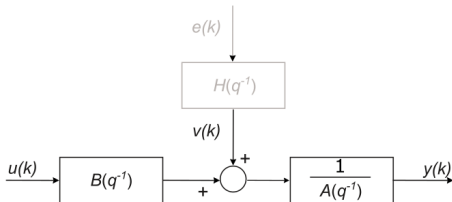
- 1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
  - Punct de start: ARX
  - Metoda variabilelor instrumentale
  - **Comparație: VI versus MEP**
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanții de performanță
- 4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

# Comparație

Atât metoda MEP cât și cea VI sunt extensii ale metodei ARX:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

la perturbații  $v(k)$  diferite de zgomot alb  $e(k)$ .



- **Metoda MEP** include explicit modelul perturbației în structură, de ex. în ARMAX  $v(k) = C(q^{-1})e(k)$ , ducând la  $A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$ .
- **Metoda IV** nu modelează perturbația explicit, dar este proiectată pentru a fi robustă la perturbații care nu sunt zgomot alb – perturbații “colorate”, folosind variabile instrumentale  $Z(k)$  necorelate cu aceste perturbații.

## Comparație (continuare)

**Avantaj VI:** Structură de model simplă, identificarea constă din rezolvarea unui sistem de ecuații liniare. În contrast, MEP necesită rezolvarea unei probleme de optimizare mai complicate (de ex. cu metoda Newton), vulnerabilă la minime locale, etc.

**Dezavantaj VI:** (motivul pentru care am răspuns “da” rezervat la început) În practică, pentru un număr finit  $N$  de date, calitatea modelului depinde mult de VI alese  $Z(k)$ . În plus, modelul rezultat are un risc mai mare de a fi instabil (chiar dacă sistemul real este stabil).

Există și metode de a alege VI  $Z(k)$  optime într-un anumit sens matematic, dar nu le vom discuta aici.



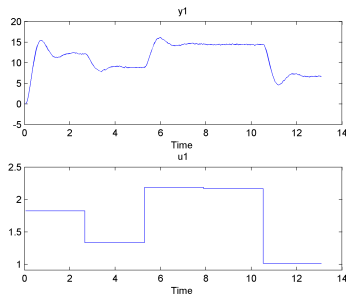
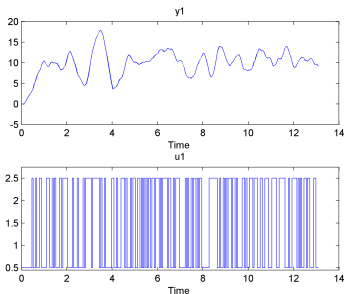
# Conținut

- 1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
- 2 Exemplu Matlab**
- 3 Garanții de performanță
- 4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

# Date experimentale

Seturi de date separate de identificare și validare:

```
plot(id); and plot(val);
```



Se știe în avans că sistemul are ordinul 2 și că perturbația este colorată (nu satisface structura ARX).

**Observații:** Intrarea de identificare este un SPAB, iar intrarea de validare este o secvență de trepte.

# Identificare cu generator arbitrar de VI

Definim VI prin funcția de transfer generatoare, folosind polinoame  $C(q^{-1})$  și  $D(q^{-1})$ .

```
model = iv(id, [na, nb, nk], C, D);
```

Argumente:

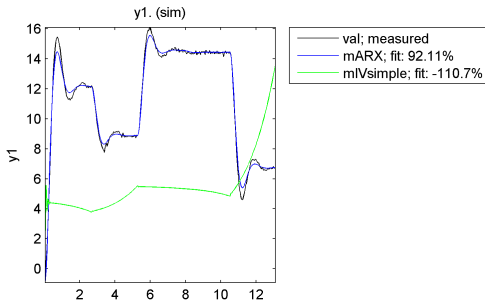
- 1 Datele de identificare.
- 2 Vector conținând gradele polinoamelor  $A$  și  $B$  și întârzierea  $nk$  (ca pentru ARX).
- 3 Polinoamele  $C$  și  $D$ , reprezentate ca vectori de coeficienți în ordinea *crescătoare* a puterilor lui  $q^{-1}$ .

# Rezultat cu VI simple

Luăm  $C(q^{-1}) = 1$ ,  $D(q^{-1}) = -q^{-nb}$ , ducând la

$$Z(k) = [u(k - nb - 1), \dots, u(k - na - nb), u(k - 1), \dots, u(k - nb)]^T.$$

Comparăm cu ARX.

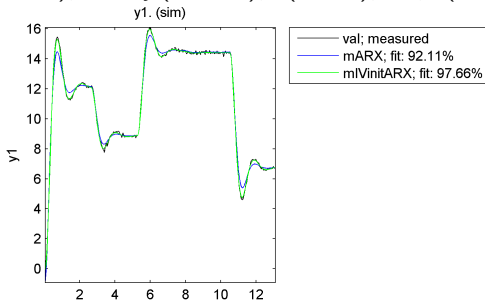


## Concluzii:

- Model instabil,  $\Rightarrow$  VI trebuie aplicate cu atenție fiindcă **modelele nu sunt întotdeauna stabile!** (reamintim comparația cu MEP)
- Rezultatele sunt foarte proaste cu această alegere simplă de VI.

# Rezultat cu VI din modelul ARX

$C(q^{-1}) = \hat{A}(q^{-1})$ ,  $D(q^{-1}) = \hat{B}(q^{-1})$  din ARX, ducând la  $Z(k) = [-\hat{y}(k-1), \dots, -\hat{y}(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T$ .

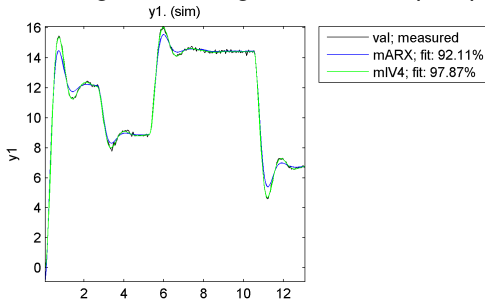


**Concluzii:** VI obține rezultate bune, în particular mai bune decât ARX. Motivul este perturbația colorată, care este tratată eficient de către VI (în timp ce ARX nu o poate lua în considerare – dar furnizează totuși un punct de pornire bun pentru VI).

# Rezultat cu VI automate

```
model = iv4(id, [na, nb, nk]);
```

Implementează un algoritm care generează VI aproape-optimale.



**Concluzie:** Performanța este în esență aceeași cu VI din ARX.

# Conținut

- 1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanții de performanță**
- 4 Identificarea în buclă închisă folosind VI

# Ipoteze

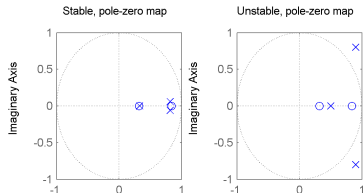
## Ipoteze (simplificate)

- 1 Perturbația  $v(k) = H(q^{-1})e(k)$  unde  $e(k)$  este zgomot alb de medie zero, iar  $H(q^{-1})$  este o funcție de transfer ce satisface anumite condiții.
- 2 Semnalul de intrare  $u(k)$  are un ordin de PE suficient de mare și nu depinde de perturbație (experimentul este în buclă deschisă).
- 3 Sistemul real este stabil și *unic* reprezentabil de către modelul ales: există un singur vector  $\theta_0$  pentru care polinoamele  $A(q^{-1}; \theta_0)$  și  $B(q^{-1}; \theta_0)$  sunt identice cu cele ale sistemului real.
- 4 Matricea  $E \{Z(k)Z^T(k)\}$  este inversabilă.



# Discuție ipoteze

- Ipoteza 1 evidențiază principalul avantaj al VI față de MEP: perturbația poate fi colorată.
- Ipotezele 2 și 3 nu sunt foarte diferite de cele impuse de către MEP. Pentru ca un sistem în timp discret să fie stabil, toți polii trebuie să fie în strict în interiorul cercului de rază 1 centrat în origine:



**Întrebare:** De ce nu experimentul nu poate fi în buclă închisă?

- Dată fiind o intrare cu ordin de PE suficient – Ipoteza 4 se rezumă la o selecție judicioasă a variabilelor instrumentale (de ex. nu fără interdependențe liniare).

# Garanție

## Teorema 1

Când numărul de date  $N \rightarrow \infty$ , soluția  $\hat{\theta}$  a metodei VI converge la vectorul corect de parametri  $\theta_0$ .

**Observație:** Garanție de **consistență**, la limită când numărul de date tinde la infinit.

# Extensii posibile

- Sisteme cu intrări și ieșiri multiple (MIMO).
- Vectorul  $Z$  al VI de dimensiune mai mare decât vectorul de parametri  $\theta$  — cu modificări adiționale, se numesc metodele extinse ale variabilelor instrumentale.
- Identificarea sistemelor ce funcționează în buclă închisă

# Conținut

- 1 Derivare analitică a metodei variabilelor instrumentale
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanții de performanță
- 4 Identificarea în buclă închisă folosind VI**

# Motivare

În practică, sistemele trebuie adesea să fie controlate, fiindcă dacă ar funcționa fără control, în buclă deschisă:

- Ar fi instabile
- Semnalele nu ar satisface limite impuse din motive de de siguranță sau economice

În acest caz,  $u(k)$  se calculează cu reacție de la ieșirea  $y(k)$ :  
sistemul funcționează în buclă închisă

# Identificarea în buclă închisă

Cu toate acestea, majoritatea metodelor pe care le-am studiat presupun că sistemul funcționează în buclă deschisă! De exemplu, garanția metodei VI impune (printre altele):

- ...
- Semnalul de intrare  $u(k)$  nu depinde de perturbație (experimentul este în buclă deschisă).
- ...

Eliminarea acestei condiții duce la **identificarea în buclă închisă**.

Mai multe metode pot fi modificate pentru a funcționa în acest context, printre care metodele MEP.

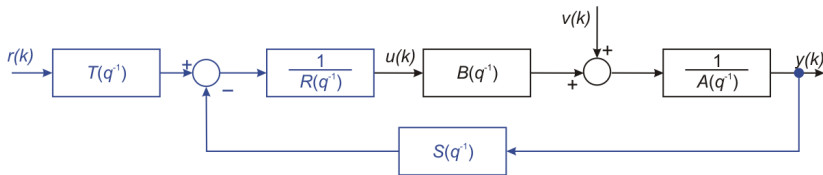
Ne vom concentra aici asupra metodei VI, mai ușor de modificat.

# Structura VI în buclă închisă

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + v(k)$$

$$R(q^{-1})u(k) = T(q^{-1})r(k) - S(q^{-1})y(k)$$

$R, T, S$  polinoame



Așadar, în general  $u(k)$  depinde:

- dinamic (via  $R(q^{-1})$ ),
- de ieșirea sistemului, cu reacție negativă prin  $S(q^{-1})$ ,
- și prin  $T(q^{-1})$  de o intrare externă  $r(k)$   
– de obicei un semnal de referință

# Dificultate

Condiția de buclă deschisă va fi evident invalidă. Investigăm mai în profunzime problema.

Motivul fundamental pentru care am avut nevoie de bucla deschisă a fost pentru ca erorile de parametri:

$$\hat{\theta} - \theta_0 = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z(k) v(k) \right]$$

să fie egale cu zero, ducând la un model bun. În acest scop, necesităm:

- $E \{ Z(k) v(k) \}$  zero.
- $E \{ Z(k) \varphi^T(k) \}$  inversabilă.

Cu alegerile uzuale de VI, calculate pe baza intrării  $u$  (care acum depinde de  $y$  și așadar de  $v$ ), prima condiție este invalidată.



## VI în buclă închisă: idee

Vectorul de VI  $Z(k)$  nu mai are voie să depindă de  $u(k)$ .

Idee: **construim  $Z(k)$  în funcție de  $r(k)$ !**

Atunci:

- $E \{Z(k)v(k)\}$  va fi zero în mod natural, fiindcă noi generăm referința  $r$ , independent de perturbația  $v$
- Matricea  $E \{Z(k)\varphi^T(k)\}$  devine inversabilă dacă ne asigurăm că VI sunt bine alese (de ex. fără dependențe liniare), și că referința  $r$  are un ordin de PE suficient de mare

# Exemple de alegeri pentru VI

Cea mai simplă idee – includem în  $Z$  numărul corect de valori precedente ale referinței:

$$Z(k) = [r(k-1), r(k-2), \dots, r(k-na-nb)]^T$$

Generalizare la combinații liniare de aceste valori:

$$Z(k) = F \cdot [r(k-1), r(k-2), \dots, r(k-na-nb)]^T$$

unde  $F$  este inversabilă. Cazul simplu este recuperat alegând  $F$  matricea identitate.

# Rezumat

- Obiectiv: combinarea simplității regresiei liniare din ARX cu generalitatea perturbației  $v$  din MEP
- Investigație în motivul pentru care ARX eșuează când  $v$  este colorat
- Soluție: înlocuirea regresorilor  $\varphi$  (în locuri bine alese din ecuații) cu *variabilele instrumentale*  $Z$  care nu depind de  $y$
- Câteva metode de a calcula  $Z$  doar din  $u$
- Calitatea soluției depinde mult de  $Z$ , poate fi chiar instabilă
  
- Exemplu Matlab
  
- Generalizarea adițională a lui  $Z$  ca să depindă doar de referința  $r$  permite aplicarea metodei VI în buclă închisă