

# Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3  
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu



# Partea IV

## Analiza de corelație

# Conținut

- 1 Metoda analizei de corelație
  - Derivare analitică
  - Un algoritm practic. Modelul FIR
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanție de acuratețe (simplificată)

# Motivație 1

De ce alte metode pe lângă de analiza în domeniul timp?

Analiza în domeniul timp a răspunsurilor la treaptă și impuls:

- Se poate aplica doar pentru câteva valori ale ordinului sistemului
- Trebuie de obicei efectuată (semi-)manual
- Produce un model imprecis, euristic al sistemului

Metodele de identificare pe care le vom discuta mai departe:

- Funcționează pentru orice ordin al sistemului
- Furnizează algoritmi automați, complet implementabili
- Garantează acuratețea soluției (în anumite condiții tehnice)

# Motivație 2

## De ce analiza de corelație?

- Cea mai apropiată de analiza în domeniul timp (modelul este răspunsul la impuls)
- Model “cu adevărat” neparametric
- O metodă “simplă” din rândul tehnicilor generale de identificare

# Clasificare

Reamintim taxonomia modelelor din Partea I:

După numărul de parametri:

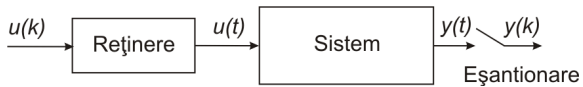
- 1 Modele parametrice: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut și de obicei mic de parametri
- 2 **Modele neparametrice**: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri  
Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoștințele disponibile în avans (“culoare”):

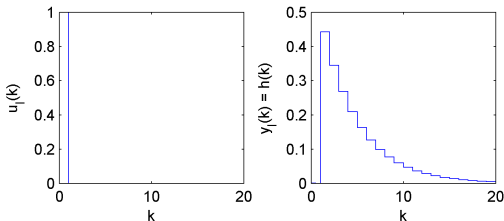
- 1 Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
- 2 **Modele cutie neagră**: complet necunoscute în avans
- 3 Modele cutie gri: parțial cunoscute

Analiza de corelație este o metodă cu adevărat neparametrică; produce un *model sub formă de răspuns la impuls*.

# Reamintim: model în timp discret



# Răspunsul discret la impuls



Semnal impuls unitar în timp discret:

$$u_I(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

(nu are aria 1, fiind așadar diferit de realizarea în timp discret a impulsului continuu!)

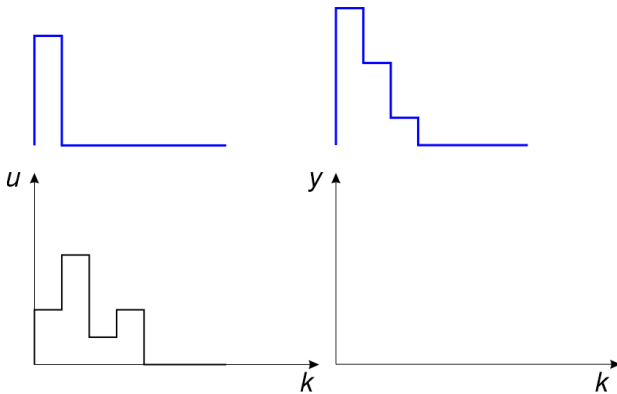
Răspuns discret la impuls:

$$y_I(k) = h(k), \quad k \geq 0$$

$h(k), k \geq 0$  se numește și **funcția pondere** a sistemului.

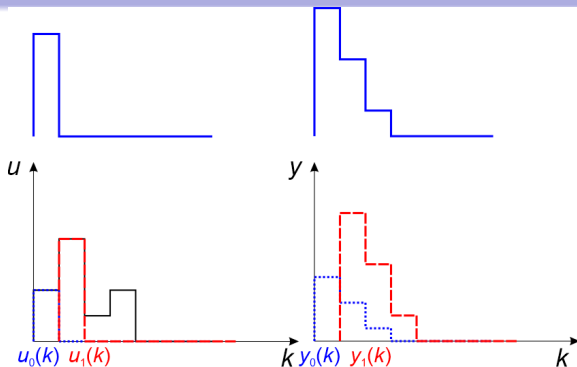


# Model răspuns la impuls: Problemă



Se dă o intrare în timp discret  $u(k)$ . Obiectivul este găsirea ieșirii rezultante  $y(k)$ .

# Model răspuns la impuls: Descompunerea intrării



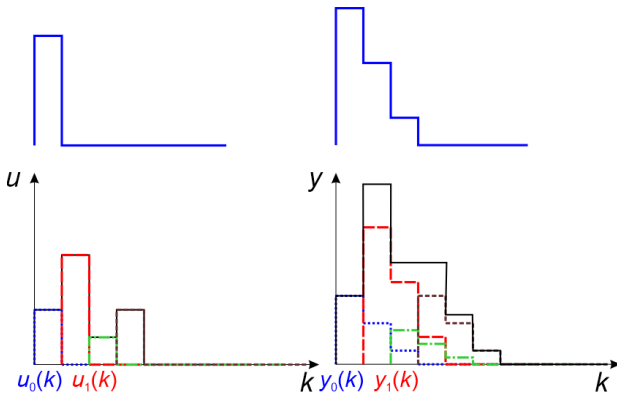
Luăm semnalul  $\tilde{u}_j(k)$  egal  $u(j)$  at  $k = j$ , și 0 în rest;  $\tilde{u}_j(k)$  este o versiune deplasată și scalată a impulsului unitar:

$$\tilde{u}_j(k) = u(j)u_1(k - j)$$

Răspunsul la  $\tilde{u}_j(k)$  este așadar o versiune deplasată și scalată a răspunsului la impuls:

$$\tilde{y}_j(k) = u(j)h(k - j)$$

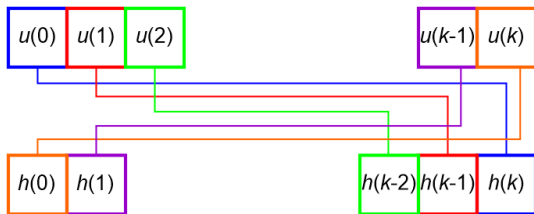
# Model răspuns la impuls: Superpoziție



Dar  $u(k)$  = superpoziția mai multor semnale  $\tilde{u}_j$ , și datorită liniarității:

$$y(k) = \sum_{j=0}^k \tilde{y}_j(k) = \sum_{j=0}^k u(j)h(k-j)$$

# Model răspuns la impuls: Convoluție



$$y(k) = \sum_{j=0}^k \tilde{y}_j(k) = \sum_{j=0}^k u(j)h(k-j) = \sum_{j=0}^k h(j)u(k-j) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j)$$

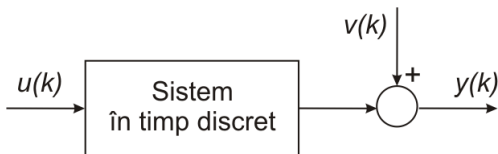
unde am presupus condiții inițiale zero, i.e.  $u(j) = 0 \forall j < 0$ .

# Model de tip răspuns la impuls

Răspunsul la o intrare arbitrară  $u(k)$  este *convoluția* intrării cu răspunsul discret la impuls:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j) + v(k)$$

unde am inclus pe lângă modelul ideal și o componentă de perturbație  $v(k)$ .



# Ipoteze

## Ipoteze

- 1 Intrarea  $u(k)$  este un proces stohastic staționar.
- 2 Intrarea  $u(k)$  și perturbația  $v(k)$  sunt independente.

## Reamintim:

- Independența variabilelor aleatoare.
- Proces stohastic staționar: aceeași medie la orice moment de timp, covarianța depinde doar de diferența între pașii de timp.

# Funcții de covarianță

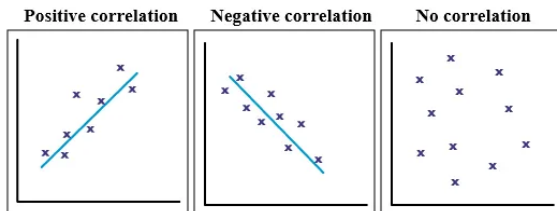
Funcțiile de covarianță de definesc astfel:

$$r_{yu}(\tau) = E \{y(k + \tau)u(k)\} \left( = \frac{1}{\#} \sum_k y(k + \tau)u(k) \right)$$

$$r_u(\tau) = E \{u(k + \tau)u(k)\} \left( = \frac{1}{\#} \sum_k u(k + \tau)u(k) \right)$$

**Observație:** Aceste cantități sunt covarianțele adevărate doar dacă intrarea și ieșirea sunt de medie zero. Dacă această condiție nu este satisfăcută, atunci mediile nonzero trebuie eliminate din semnale înainte de a aplica algoritmul.

# Intuiție despre covarianță



Axele  $X$  și  $Y$  ale fiecărui grafic sunt cele două variabile aleatoare studiate, fie  $u(k + \tau)$  și  $u(k)$ , sau  $y(k + \tau)$  și  $u(k)$  (pentru un singur  $\tau$ !)

- Corelate pozitiv (covarianță  $> 0$ ): când  $X$  crește,  $Y$  crește.
- Corelate negativ (covarianță  $< 0$ ): când  $X$  crește,  $Y$  scade.
- Necorelate (covarianță  $= 0$ ): nici o relație.



# Relația între covarianțe și răspunsul la impuls

Dacă nu ar exista perturbații, atunci:

$$\begin{aligned}
 r_{yu}(\tau) &= E \{y(k + \tau)u(k)\} \\
 &= E \left\{ \left[ \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k + \tau - j) \right] u(k) \right\} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} h(j)E \{u(k + \tau - j)u(k)\} = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(\tau - j)
 \end{aligned}$$

Erorile generate de perturbații sunt tratate implicit mai târziu, folosind regresia liniară.

# Identificarea răspunsului la impuls

Scriem ecuația covarianțelor pentru toate valorile  $\tau$ :

$$r_{yu}(0) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(-j) = h(0)r_u(0) + h(1)r_u(-1) + h(2)r_u(-2) + \dots$$

$$r_{yu}(1) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(1-j) = h(0)r_u(1) + h(1)r_u(0) + h(2)r_u(-1) + \dots$$

...

obținând (în principiu) un sistem infinit de ecuații liniare:

- Coeficienții sunt  $r_u(\tau)$ ,  $r_{yu}(\tau)$ .
- Necunoscutele sunt  $h(0)$ ,  $h(1)$ ,  $\dots$ : soluția sistemului.

Urmează un algoritm practic, ce folosește un set finit de date.

# Conținut

- 1 Metoda analizei de corelație
  - Derivare analitică
  - Un algoritm practic. Modelul FIR
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanție de acuratețe (simplificată)

## Obținerea covarianțelor din date: $r_u$

Se dau semnalele  $u(k)$ ,  $y(k)$ , unde  $k = 1, \dots, N$ .  
Pentru valori pozitive  $\tau$ , avem:

$$\begin{aligned} r_u(\tau) &= E \{u(k + \tau)u(k)\} \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} u(k + \tau)u(k) \\ &=: \hat{r}_u(\tau), \quad \forall \tau \geq 0 \end{aligned}$$

și  $\hat{r}_u(-\tau) = \hat{r}_u(\tau)$  pentru  $\tau < 0$ ,  $u$  fiind un proces staționar.

# Obținerea covarianțelor din date: $r_{yu}$

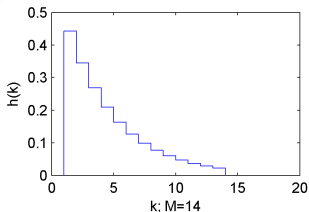
Pentru valori  $\tau$  pozitive și negative:

$$r_{yu}(\tau) = E \{y(k + \tau)u(k)\}$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} y(k + \tau)u(k) & \text{dacă } \tau \geq 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1+|\tau|}^N y(k + \tau)u(k) & \text{dacă } \tau < 0 \end{cases}$$

$$=: \hat{r}_{yu}(\tau), \quad \forall \tau \geq 0$$

# Modelul răspuns finit la impuls



Impunem condiția  $h(k) = 0$  pentru  $k \geq M$ . Obținem modelul de tip **răspuns finit la impuls** (en. *finite impulse response*, FIR):

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + v(k)$$

Ecuția covarianțelor este trunchiată în același fel:

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)r_u(\tau-j)$$

**De notat:**  $M$  trebuie selectat pentru a avea  $MT_s \gg$  constantele de timp dominante (sistemul să fie aproape în regim staționar)

# Sistem liniar de ecuații

Folosind  $\hat{r}_{yu}$ ,  $\hat{r}_u$  estimate din date, scriem ecuațiile trunchiate pentru  $\tau = 0, \dots, T - 1$  (ținând cont că  $\hat{r}_u(-\tau) = \hat{r}_u(\tau)$ ):

$$\hat{r}_{yu}(0) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\hat{r}_u(-j)$$

$$= h(0)\hat{r}_u(0) + h(1)\hat{r}_u(1) + \dots + h(M-1)\hat{r}_u(M-1)$$

$$\hat{r}_{yu}(1) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\hat{r}_u(1-j)$$

$$= h(0)\hat{r}_u(1) + h(1)\hat{r}_u(0) + \dots + h(M-1)\hat{r}_u(M-2)$$

...

$$\hat{r}_{yu}(T-1) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\hat{r}_u(T-1-j)$$

$$= h(0)\hat{r}_u(T-1) + h(1)\hat{r}_u(T-2) + \dots + h(M-1)\hat{r}_u(T-M)$$

– un sistem liniar de  $T$  ecuații cu  $M$  necunoscute  $h(0), \dots, h(M-1)$ .

## Sistem liniar (continuare)

În formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{yu}(0) \\ \hat{r}_{yu}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yu}(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_u(0) & \hat{r}_u(1) & \dots & \hat{r}_u(M-1) \\ \hat{r}_u(1) & \hat{r}_u(0) & \dots & \hat{r}_u(M-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{r}_u(T-1) & \hat{r}_u(T-2) & \dots & \hat{r}_u(T-M) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}$$

Selecția naivă  $T = M$  ar furniza o soluție exactă a sistemului, dar datorită zgomotului și perturbațiilor această soluție ar fi supra-antrenată. Este așadar necesar să avem  $T > M$  (preferabil,  $T \gg M$ ).

Putem acum aplica metodologia de regresie liniară (vezi Partea 3) pentru a rezolva problema.



# Utilizarea modelului FIR

După ce sistemul a fost rezolvat obținând ponderile estimate  $\hat{h}$ , prezicem ieșirea cu:

$$\hat{y}(k) = \sum_{j=0}^{M-1} \hat{h}(j)u(k-j)$$

## Caz special: Intrare de tip zgomot alb

Considerăm cazul în care intrarea  $u(k)$  este zgomot alb de medie zero.

Atunci,  $r_u(\tau) = 0$  pentru orice  $\tau \neq 0$  (zgomotul alb fiind necorelat), iar  $r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(\tau - j)$  se reduce la:

$$r_{yu}(\tau) = h(\tau)r_u(0)$$

Rezultă algoritmul foarte simplu:

$$h(\tau) = \frac{\hat{r}_{yu}(\tau)}{\hat{r}_u(0)}$$

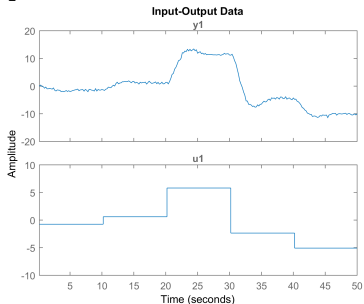
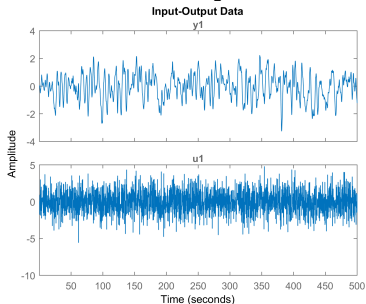
# Conținut

- 1 Metoda analizei de corelație
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanție de acuratețe (simplificată)

# Date experimentale

Se dau următoarele seturi de date, separate pentru identificare și validare.

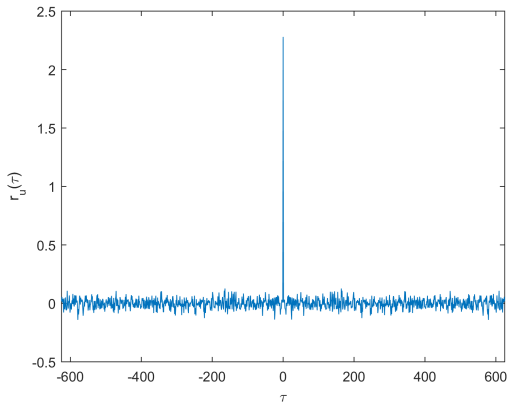
```
plot(id); and plot(val);
```



De notat că intrarea de identificare este zgomot alb, dar intrarea de validare nu este. Setul de identificare conține 2500 de eșantioane. Observăm că semnalele sunt de medie zero.

# Covarianța intrării

```
[c, tau] = xcorr(id.u); and plot(tau, c);
```



Intrarea este zgomot alb.

# Aplicarea analizei de corelație

```
fir = cra(id, M, 0); sau fir = cra(id, M, 0, plotlevel);
```

Argumentele funcției:

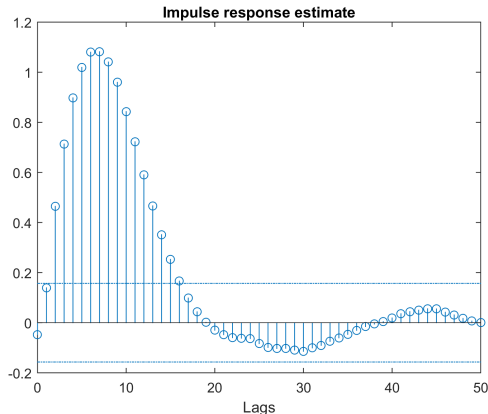
- 1 Datele de identificare.
- 2 Lungimea  $M$  a modelului de tip FIR, fixată aici la 45.
- 3 Al treilea argument egal cu 0 înseamnă ca nu se efectuează *albirea intrării*.

Tratarea intrărilor ne-ideale:

- Dacă intrarea nu are medie zero, setul de identificare trebuie trecut prin funcția `detrend` pentru a scădea valorile medii din semnale.
- Dacă intrarea nu este zgomot alb, al treilea argument trebuie lăsat egal cu valoarea implicită (nespecificându-l, sau fixându-l egal cu o matrice vidă), ceea ce va duce la albirea semnalului de intrare.

# Aplicarea analizei de corelație (continuare)

Implicit (sau când `plotlevel=1`) parametrii modelului FIR sunt reprezentați grafic împreună cu un interval de încredere de 99%.

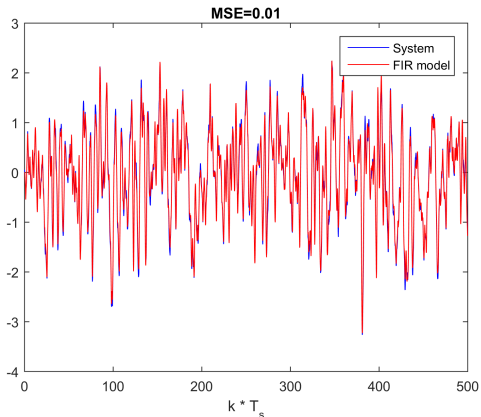


`plotlevel=2` reprezintă grafic de asemenea și funcțiile de covarianță.

# Rezultate pe datele de identificare

```
yhat = conv(fir, id.u); yhat = yhat(1:length(id.u));
```

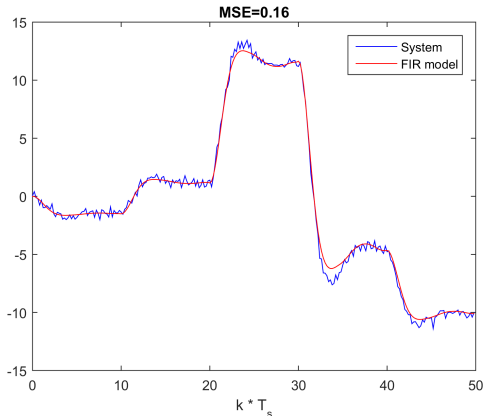
Pentru a simula modelul FIR, trebuie efectuată *convoluția* între parametrii FIR și intrare. Ieșirea simulată este mai lungă decât este necesar, și este așadar trunchiată la lungimea corectă.





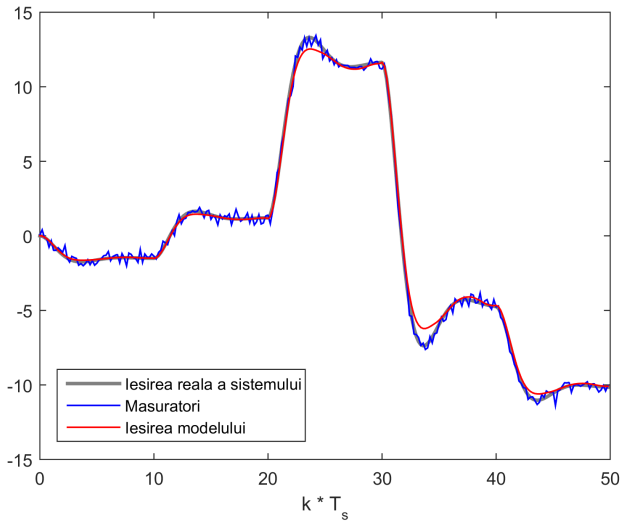
# Validarea modelului FIR

```
yhat = conv(fir, val.u); yhat = yhat(1:length(val.u));
```



Rezultatele sunt rezonabile, dar nu excelente.

# Detalii despre semnale



## Alternativă: funcția `impulseest`

```
model = impulseest(id, M); or model = impulseest(id);
```

Folosește un algoritm mai avansat decât cel studiat la curs.

# Conținut

- 1 Metoda analizei de corelație
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanție de acuratețe (simplificată)**

# Garanție simplificată pentru intrare zgomot alb

## Ipoteză adițională

- 1 Intrarea  $u(k)$  este zgomot alb de medie zero.

## Teoremă

Pentru intrare de tip zgomot alb, valorile estimate  $\hat{h}(\tau)$  converg la valorile reale  $h(\tau)$  când numărul de eșantioane  $N$  tinde la infinit.

**Observație:** Acest tip de rezultat, în care soluția corectă este obținută la limita numărului infinit de date, se numește *consistență*.

# Rezumat

- Semnalul impuls unitar în timp discret, și răspunsul discret la impuls  $h$ .
- Utilizarea răspunsului la impuls ca model: convoluție cu intrarea  $u$ .
- Cazul ideal: Funcțiile de covarianță și sistemul liniar de ecuații în  $h$ .
- Analiza de corelație în practică:
  - covarianțe din date finite
  - răspunsul finit la impuls (FIR)
  - sistem de ecuații finit-dimensional
- Exemplu Matlab.
- Garanție de acuratețe simplificată (consistență în limita datelor infinite).