

Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu



Partea III

Analiza răspunsurilor la treaptă și impuls

Motivare

În general:

În anumite cazuri un model simplu de ordinul 1 sau 2 este suficient; analiza răspunsurilor la treaptă și impuls este o metodă ușoară de a obține astfel de modele.

Pentru studenți:

Metoda cea mai apropiată de cunoștințele de la teoria sistemelor
⇒ o tranziție mai ușoară către alte metode.

Clasificare

Reamintim **Taxonomia modelelor matematice** din Partea I:

După numărul de parametri:

- 1 **Modele parametrice**: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut și de obicei mic de parametri
- 2 **Modele neparametrice**: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri
Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoștințele disponibile în avans (“culoare”):

- 1 Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
- 2 Modele cutie neagră: complet necunoscute în avans
- 3 **Modele cutie gri**: parțial cunoscute

Clasificare (continuare)

La pașii la care studiem graficul în sine, răspunsurile la treaptă și impuls pot fi interpretate ca **modele neparametrice**: sunt funcții de timp continuu care, în general, nu pot fi reprezentate printr-un număr finit de parametri.

Pe baza graficului însă, vom determina în final o funcție de transfer – un **model parametric**.

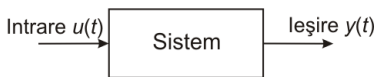
Model de tip **cutie gri**.

Studiul răspunsurilor la treaptă și impuls se numește *analiza în domeniul timp*.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Definiție sistem liniar



Un sistem este *liniar* dacă satisface principiile de:

Superpoziție: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u_1(t)$ cu ieșirea $y_1(t)$; și la $u_2(t)$ cu $y_2(t)$; atunci la intrarea $u_1(t) + u_2(t)$ va răspunde cu ieșirea $y_1(t) + y_2(t)$.

Omogeneitate: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u(t)$ cu ieșirea $y(t)$; atunci la $\alpha u(t)$ va răspunde cu $\alpha y(t)$.

Transformata Laplace: discuție

- s se numește argument *complex* (este un număr complex), iar transformata Laplace efectuează trecerea a unei funcții din domeniul timp t în domeniul complex s .
- Avantajul este că multe operații aplicate uzual în inginerie (derivare, integrare etc.) devin mult mai simple în domeniul s .

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2



Sistem de ordinul 1: Exemplu

Sistemele de ordinul 1 sunt frecvent întâlnite. Exemplu tipic: un sistem termic.

Considerăm un obiect la temperatura θ_1 (variabila de ieșire) plasat într-un mediu la temperatura θ_2 (variabila de intrare). Avem:

$$C\dot{\theta}_1(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{R}$$

unde C este inerția termică și R este rezistența termică.

Aplicăm transformata Laplace de ambele părți ale ecuației:

$$Cs\Theta_1(s) = \frac{\Theta_2(s) - \Theta_1(s)}{R}$$

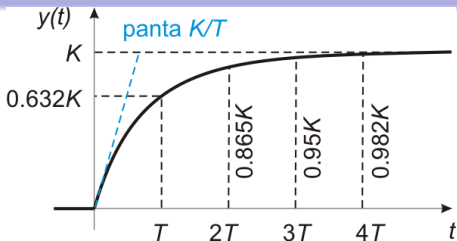
obținând funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{\Theta_1(s)}{\Theta_2(s)} = \frac{1}{CRs + 1}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 **Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - **Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor**
 - Exemplu
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Răspunsul la treaptă (indicial) de ordinul 1 ideal



Rezolvând ecuația diferențială pentru $y(t)$ (sau mai simplu: rezolvând pentru $Y(s)$ și aplicând transformata Laplace inversă \mathcal{L}^{-1}), obținem:

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

ducând la:



$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K(1 - 0) = K$$

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}, \quad \dot{y}(0) = \frac{K}{T} e^0 = \frac{K}{T}$$

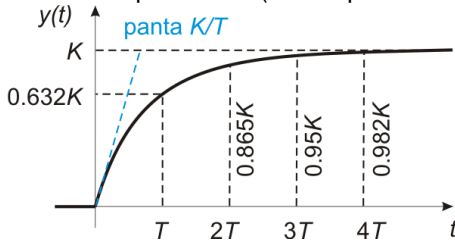
$$y(T) = K(1 - e^{-1}) \approx 0.632K$$

și în mod similar pentru $t = 2T, 3T, 4T$ (vezi figura).

Determinarea parameterilor

Până acum, totul cunoscut de la:  TS,  Modelarea proceselor.

Mai departe, considerăm că este dat răspunsul unui sistem real necunoscut: acesta este modelul neparametric. Îl vom folosi pentru a găsi o funcție de transfer aproximată (model parametric).



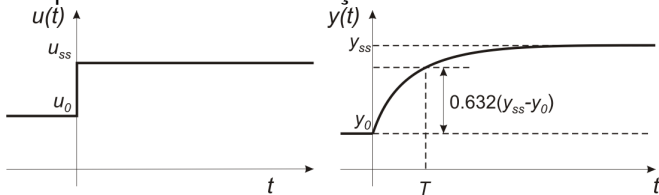
Algoritm pentru identificarea sistemului

- 1 Citește ieșirea în regim staționar. Factorul de proporționalitate K este egal cu această ieșire.
- 2 Găsește valoarea timpului la care ieșirea atinge 0.632 din valoarea staționară. Aceasta este constanta de timp T .

Condiții inițiale nenule

În practică, adeseori semnalul treaptă ideal nu poate fi folosit, fiindcă sistemul trebuie menținut în jurul unui punct de funcționare sigur/profitabil. Vom presupune că înaintea experimentului sistemul era în regim staționar la ieșirea y_0 cu intrarea constantă u_0 .

Realizarea practică a treptei este adesea un semnal rectangular ca în figură. Răspunsul sistemului este așadar non-ideal.

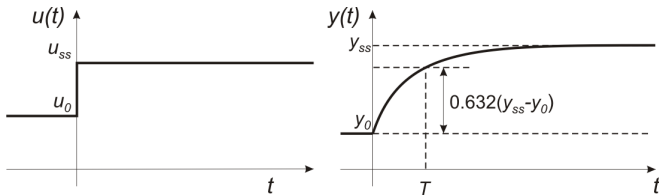


Dar sistemul este liniar! Noua intrare este $u(t) = u_0 + (u_{ss} - u_0)u_S(t)$ unde $u_S(t)$ este treapta ideală. Așadar, dacă notăm răspunsul la treaptă ideal cu $y_S(t)$, avem noua ieșire:

$$y(t) = y_0 + (u_{ss} - u_0)y_S(t)$$

adică o simplă translație și scalare a semnalului ideal.

Condiții inițiale nenule (continuare)



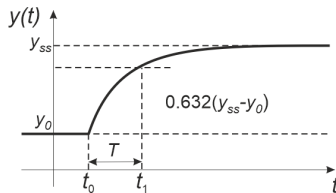
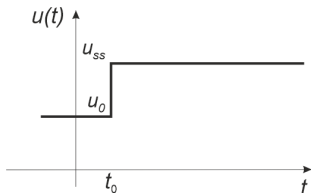
Obținem așadar:

$$y_{ss} = y_0 + (u_{ss} - u_0)K$$

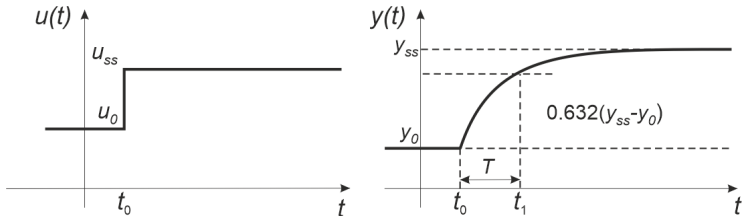
$$y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0)$$

Treaptă aplicată la timp nenul

Timpul la care este aplicată treapta poate fi și el diferit de 0, o problemă rezolvată ușor prin translatarea axei de timp. Astfel de situații pot apărea pentru oricare din răspunsurile la treaptă și impuls studiate în această parte a cursului. Vom furniza procedura pentru răspunsurile la treaptă, dar nu pentru cele la impuls; procedura este similară acolo.



Algoritm general



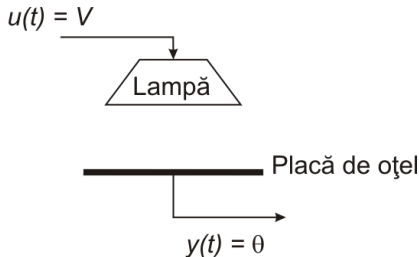
Algoritm general

- 1 Citește u_0 , y_0 , u_{ss} , y_{ss} , valorile inițiale și în regim staționar ale intrării și ieșirii. Calculează $K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0}$.
- 2 Citește timpul t_0 unde are loc treapta, și t_1 unde ieșirea urcă la 0.632 din diferență. Calculează $T = t_1 - t_0$.

Conținut

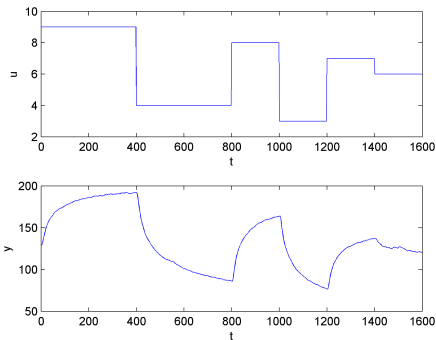
- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu: Sistem termic



Considerăm sistemul termic din figură (diferit de exemplul anterior). Intrarea este voltajul V aplicat lămpii, iar ieșirea este temperatura θ citită de un termocuplu montat pe spatele plăcii de oțel.

Sistem termic: Date experimentale



Datele sunt obținute din baza de date Daisy. Semnalele sunt în timp discret, cu perioada de eșantionare $T_s = 2$ s, dar pentru analiza în domeniul timp le vom trata ca fiind în timp continuu.

De notat: prezența **zgomotului** în date! Zgomotul apare aproape întotdeauna în experimentele de identificare.

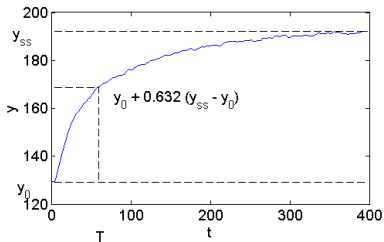
Vom folosi prima treaptă pentru identificare, și restul pentru validare.

Perioada de eșantionare

Definiție: Perioada de eșantionare T_s este intervalul de timp continuu dintre două momente succesive de eșantionare (a semnalelor de intrare, de ieșire sau a altor semnale din sistem).

Nu confundați perioada de eșantionare T_s cu constanta de timp T înmulțită cu argumentul complex s !

Sistem termic: Model și parametri



Avem $y_{ss} \approx 192^\circ \text{C}$, $y_0 \approx 129^\circ \text{C}$. Intrarea $u_{ss} = 9 \text{ V}$ și știm din experiment că intrarea inițială $u_0 = 6 \text{ V}$. Așadar:

$$K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0} \approx \frac{192 - 129}{9 - 6} \approx 21$$

Mai departe, $y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0) \approx 169$, și identificând acest punct pe grafic obținem $T \approx 60$.

Sistem termic: Modelul ca funcție de transfer

$$\hat{K} = 21$$

$$\hat{T} = 60$$

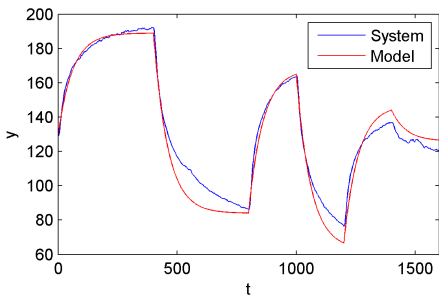
$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}}{\hat{T}s + 1} = \frac{21}{60s + 1}$$

Notăția $\hat{}$ evidențiază faptul că parametrii, și așadar modelul, sunt o aproximare.

Matlab: $H = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$, cu polinoamele `num` (numărător) și `den` (numitor) reprezentate prin vectori de coeficienți în ordinea descrescătoare a puterilor lui s .

(De notat: Calculele sunt de fapt efectuate cu numere `double` în Matlab, deci folosirea numerelor din prezentări va duce la rezultate ușor diferite. Această observație se aplică tuturor exemplilor.)

Sistem termic: Validare

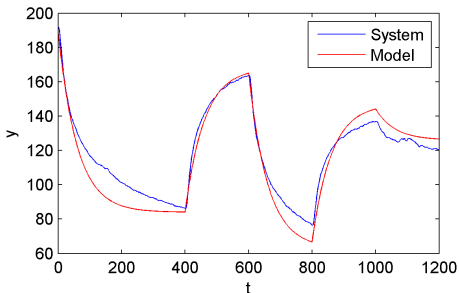


De notat că o este necesară procedură specială pentru a lua în considerare condiția inițială nenulă; o vom detalia când studiem răspunsul la impuls.

Modelul nu este excelent – de ex. dinamica de răcire este mai încetă decât cea de încălzire, deci în realitate sistemul nu este unul simplu de ordinul 1.

Cu toate acestea, funcția de transfer este suficientă pentru un prim model aproximativ – utilizarea tipică a analizei în domeniul timp.

Sistem termic: Validare (continuare)



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare (de la treapta 2 încolo):

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - y(k))^2 \approx 62.10$$

MSE are sens fiindcă datele sunt de fapt eșantionate în timp discret.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Sistem de ordinul 2: Exemplu

Sistemele de ordinul 2 sunt și ele adeseori întânite.



Considerăm o masă m atașată unui arc, căreia îi aplicăm o forță f (intrarea) în direcția opusă arcului. Măsurăm poziția x a masei relativ la poziția de repaus a arcului (ieșirea). Din legea a doua a lui Newton:

$$m\ddot{x}(t) = f(t) - kx(t)$$

unde k este constanta elastică a arcului.

Aplicând transformata Laplace de ambele părți:

$$ms^2X(s) = F(s) - kX(s)$$

ducând la funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

Sistem de ordinul 2: Forma generală

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

unde:

- K este factorul de proporționalitate ($= \frac{1}{k}$ în exemplu)
- ξ este factorul de amortizare ($= 0$ în exemplu)
- ω_n este pulsația naturală ($= \sqrt{k/m}$ în exemplu)

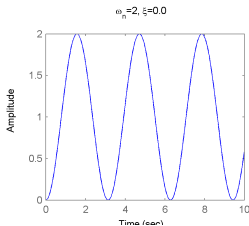
Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

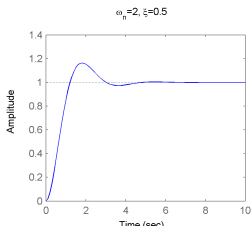
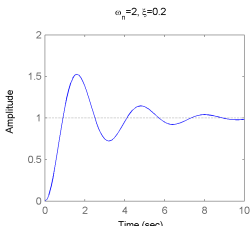
Forme tipice ale răspunsului la treaptă de ordinul 2

Factorul de amortizare ξ determină forma răspunsului.

$\xi = 0$, neamortizat

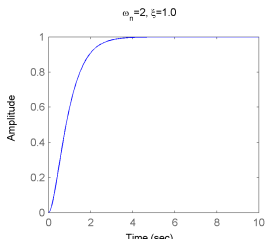


$\xi \in (0, 1)$, subamortizat; valori ξ mai mici duc la oscilații mai mari

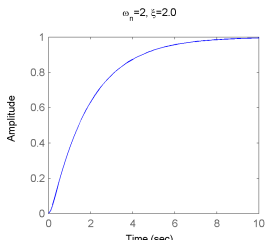


Forme tipice (continuare)

$\xi = 1$, critic amortizat

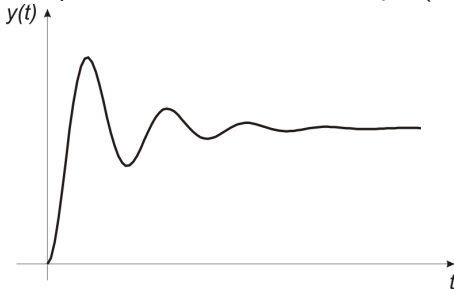


$\xi > 1$, supraamortizat



Răspuns la treaptă de ordinul 2 subamortizat

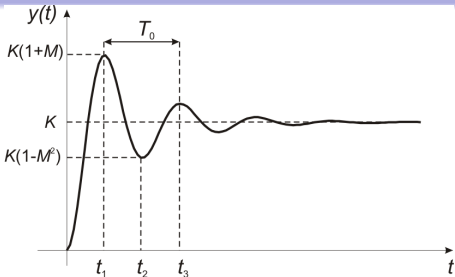
Ne ocupăm în principal de cazul subamortizat, $\xi \in (0, 1)$



Rezolvând pentru $y(t)$ obținem:

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arccos \xi) \right]$$

Caracteristicile răspunsului



$$\text{Valoarea staționară: } \lim_{t \rightarrow \infty} K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\dots) \right] = K$$

Aflăm maximele și minimele fixând derivata la zero:

$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) = 0$$

$$\Rightarrow t_m = \frac{m\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \quad m \geq 0$$

$$y(t_m) = K[1 + (-1)^{m+1} M^m], \text{ unde } \textit{suprareglajul} M = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Pornirea de la răspuns la treaptă

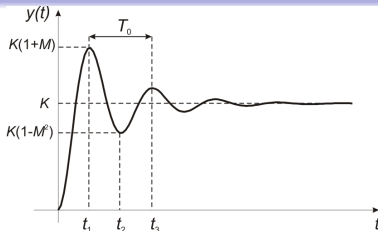
Considerăm acum că este dat răspunsul unui sistem necunoscut.



Folosind elementele de mai sus, vom afla o funcție de transfer aproximată a sistemului.

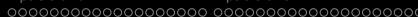


Determinarea parametrilor

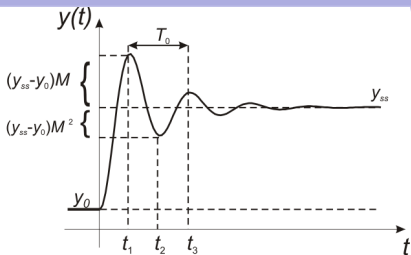
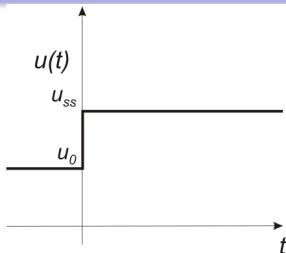


Algoritm

1. Determină ieșirea staționară y_{ss} . Acesta este factorul de proporționalitate K .
2. Determină suprareglajul M , (a) din primul maxim: $M = \frac{y(t_1) - y_{ss}}{y_{ss}}$,
sau (b) din raportul între primul minim și maxim: $M = \frac{y_{ss} - y(t_2)}{y(t_1) - y_{ss}}$.
3. Rezolvă $M = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, obținând $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 M}}$
4. Citește perioada de oscilație, între maxime succesive
 $T_0 = t_3 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$; sau de 2 ori maxim – minim,
 $T_0 = 2(t_2 - t_1)$. Apoi $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}}$, sau $\omega_n = \frac{2}{T_0} \sqrt{\pi^2 + \log^2 M}$.



Condiții inițiale nenule



Ca și la ordinul 1: noua intrare este $u(t) = u_0 + (u_{ss} - u_0)u_S(t)$, iar noua ieșire este versiunea traslatată și scalată a răspunsului ideal $y_S(t)$: $y(t) = y_0 + (u_{ss} - u_0)y_S(t)$. Algoritm modificat:

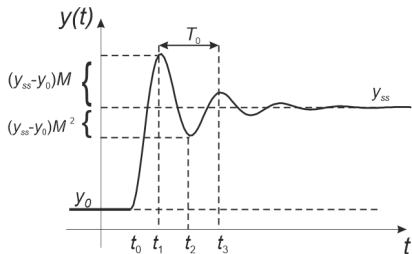
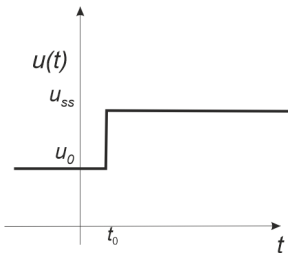
1 Factor de proporționalitate $K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0}$.

2 Suprareglaj (a) $M = \frac{y(t_1) - y_{ss}}{y_{ss} - y_0}$ (trebuie scăzut y_0), sau (b)

$M = \frac{y_{ss} - y(t_2)}{y(t_1) - y_{ss}}$ (nici o schimbare aici).

ξ , T_0 : la fel ca înainte.

Timp inițial nenul



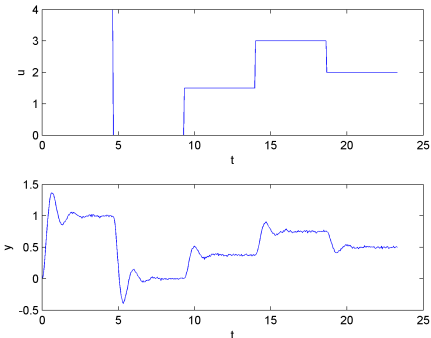
Ca și pentru ordinul 1, translatăm axa orizontală cu timpul de start t_0 al treptei. Nu există nici un impact asupra algoritmului, fiindcă se folosesc oricum timpi relativi pentru calculul perioadei de oscilație.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 **Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu de ordinul 2

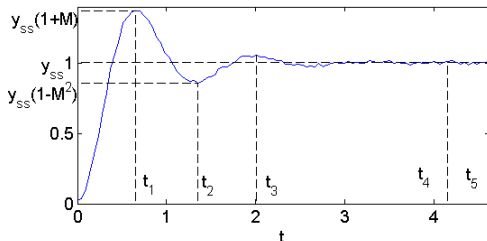
Datele sunt generate în simulare, 500 de eșantioane cu perioada de eșantionare ≈ 0.047 .



De notat din nou zgomotul. De asemenea, condițiile inițiale sunt nule ($u_0 = y_0 = 0$) dar treptele au valori nonstandard, diferite de 1.

Folosim prima treaptă pentru identificare, și treptele 3–5 pentru validare, (treapta 2 readuce sistemul în condiții nule).

Exemplu: Răspunsul la treaptă pentru identificare

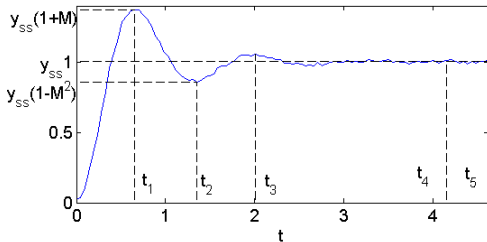


Cum ieșirea este afectată de zgomot, vom determina valoarea sa staționară prin efectuarea **mediei** câtorva eșantioane din regim staționar, mai exact eșantioanele de la 90 la 100, între t_4 and t_5 :

$$y_{ss} \approx \frac{1}{11} \sum_{k=90}^{100} y(k) \approx 1.00$$

Citim pe grafic: $t_1 \approx 0.65$, $t_2 \approx 1.35$, $t_3 \approx 1.96$, $y(t_1) \approx 1.37$, $y(t_2) \approx 0.86$. De asemenea, $u_{ss} = 4$.

Exemplu: Determinarea parametrilor



- ① Factor de proporționalitate $K = \frac{y_{ss}-y_0}{u_{ss}-u_0} = \frac{y_{ss}}{u_{ss}} \approx 0.25$.
- ② Suprareglaj $M = \frac{y(t_1)-y_{ss}}{y_{ss}-y_0} = \frac{y(t_1)-y_{ss}}{y_{ss}} \approx 0.36$.
- ③ Factor de amortizare $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 M}} \approx 0.31$.
- ④ Perioada $T_0 = t_3 - t_1 \approx 1.31$, ducând la pulsația naturală $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0\sqrt{1-\xi^2}} \approx 5.05$.

Exemplu: Modelul ca funcție de transfer

$$\hat{K} = 0.25$$

$$\hat{\xi} = 0.31$$

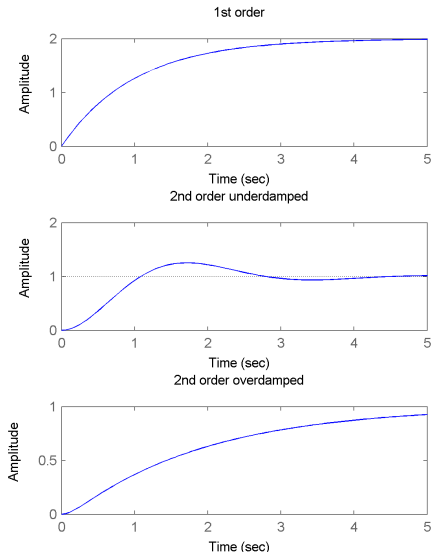
$$\hat{\omega}_n = 5.05$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}\hat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} = \frac{6.38}{s^2 + 3.09s + 25.51}$$

Conținut

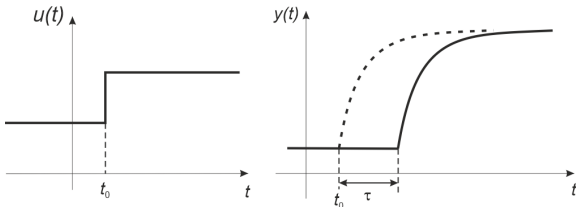
- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale**
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Alegerea ordinului



Chiar dacă este critic sau supraamortizat, la $t = 0$ răspunsul unui sistem de ordinul 2 va avea derivata egală cu 0: va fi **tangent la axa timpului**. În schimb, panta tangentei este de K/T pentru sistemele de ordinul 1.

Timp mort și timp inițial nenul



Totul se calculează relativ la timpul de start t_0 al treptei. Timpul mort τ este intervalul de *după* t_0 de care are nevoie ieșirea pentru a începe să reacționeze.

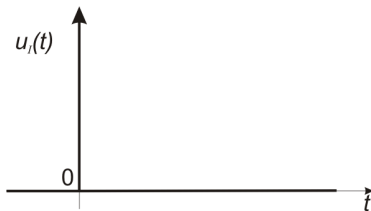
Rezumat răspuns la treaptă

- Factor de proporționalitate K : diferența dintre nivelurile la ieșire / diferența dintre nivelurile la intrare.
- Ordin 1: constanta de timp T găsită pe axa *timp* când axa *ieșire* atinge 63.2% din diferență.
- Ordin 2: perioada T_0 citită pe grafic, suprareglajul M calculat din maxime și minime. Rezultă ξ, ω_n .
- Inspecție grafic + eroare medie pătratică utilizată pentru validarea modelelor.
- Mediere eșantioane pentru zgomot în valorile inițiale / staționare.
- Timpul inițial diferit de zero și întârzierile tratate prin translatarea corespunzătoare a valorilor de timp; întârziererea intră în funcția de transfer.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1**
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Intrarea impuls ideală



Impulsul ideal este funcția delta a lui Dirac. O definiție informală:

$$u_I(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

cu o condiție suplimentară: $\int_{-\infty}^{\infty} u_I(t) dt = 1$.

(De fapt, impulsul ideal nu este o funcție, ci o așa-numită distribuție.)

○ proprietate utilă a răspunsului la impuls

În domeniul complex:

$$\text{treapta } U_S(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{impulsul } U_I(s) = 1$$

Reamintim că răspunsul în domeniul timp al unui sistem se poate scrie: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, iar $Y(s) = H(s)U(s)$.

Deci:

$$Y_S(s) = \frac{1}{s} Y_I(s), \quad Y_I(s) = s Y_S(s)$$

$$y_S(t) = \int_0^t y_I(\tau) d\tau, \quad y_I(t) = \dot{y}_S(t)$$

Răspunsul la impuls este *derivata răspunsului la treaptă*.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1**
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor**
 - Exemplu
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

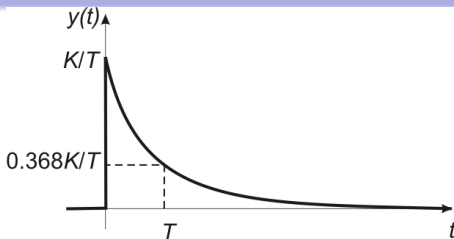
Reamintim: Sistem de ordinul 1

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

unde:

- K este factorul de proporționalitate
- T este constanta de timp

Răspunsul la impuls de ordinul 1 ideal



Folosind relația cu răspunsul la treaptă, și derivata acestui răspuns pe care am calculat-o deja, avem direct răspunsul la impuls:

$$y_1(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$

de unde rezultă:

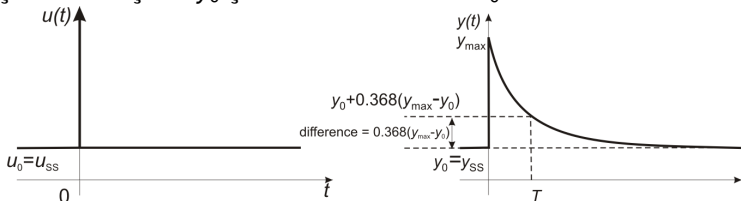
$$\begin{cases} y_1(0) = \frac{K}{T} = y_{\max} \\ y_1(T) = \frac{K}{T} e^{-1} = y_{\max} e^{-1} \approx 0.368 y_{\max} \end{cases}$$

De notat: $y_1(4T) = 0.0183 y_{\max}$, ieșirea este aproximativ staționară după $4T$.



Condiții inițiale nenule

În condiții inițiale nenule, impulsul este translatat pe axa verticală. Vom presupune că la înaintea experimentului sistemul era în regim staționar cu ieșirea y_0 și intrarea constantă u_0 .



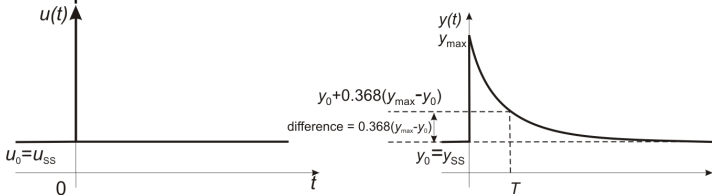
Din liniaritatea sistemului, și intrarea fiind $u(t) = u_0 + u_1(t)$, avem o ieșire translatată $y(t) = y_0 + y_1(t)$. Intrarea nu este scalată, fiindcă rezultatul nu ar mai fi un impuls aproximativ (aria ar fi diferită de 1).

$$\text{Așadar, comportamentul este: } \begin{cases} y_{\max} = y_0 + \frac{K}{T} \\ y(T) = y_0 + 0.368(y_{\max} - y_0) \end{cases}$$

De notat că $u_0 = u_{ss}$, $y_0 = y_{ss}$.

Determinarea parametrilor

Considerăm acum că este dat răspunsul la impuls al unui sistem necunoscut. Vom folosi acest răspuns pentru a găsi o funcție de transfer aproximată.

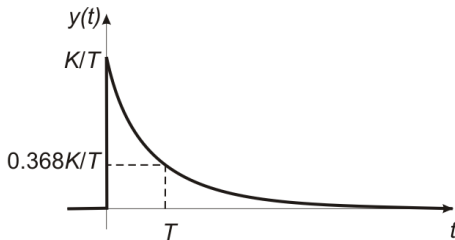


Presupunem întâi condiții inițiale nenule fiindcă sunt favorabile: oferă o metodă robustă de a estima factorul de proporționalitate K .

Algoritm

- 1 Citește ieșirea staționară (sau inițială) $y_{SS} = y_0$, la fel și intrarea $u_{SS} = u_0$. Apoi, $K = y_{SS}/u_{SS}$.
- 2 Citește y_{max} și citește constanta de timp T la momentul în care ieșirea descrește la 0.368 din diferența $y_{max} - y_0$.

Determinarea parametrilor în condiții inițiale nule



Putem estima factorul de proporționalitate folosind $y_{\max} = \frac{K}{T}$, dar în practică această metodă nu este la fel de precisă, datorită zgomotului și a caracterului non-ideal al impulsului.

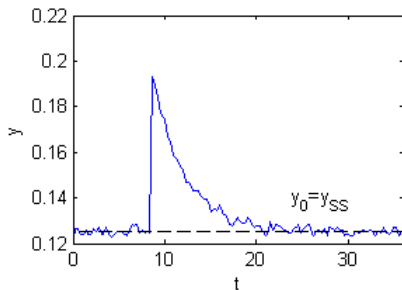
Algoritm

- 1 Citește y_{\max} și determină timpul la care ieșirea descrește la 0.368 din y_{\max} . Aceasta este constanta de timp T .
- 2 Calculează $K = y_{\max} T$.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1**
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu: Model și parametri

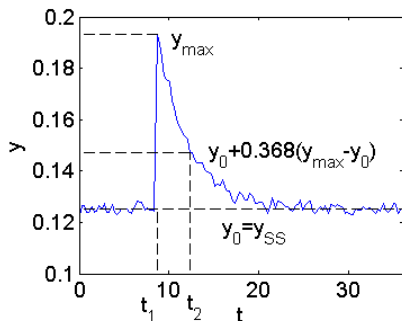


Folosim graficul pentru a estima funcția de transfer. Avem $u_0 = u_{ss} = 0.5$.

Găsim ieșirea staționară (egală cu cea inițială) efectuând media câtorva eșantioane:

$$y_{ss} = y_0 \approx \frac{1}{11} \sum_{k=120}^{130} y(k) \approx 0.13$$

Exemplu: Model și parametri (continuare)



leșirea maximă este $y_{\max} \approx 0.19$, atinsă la $t_1 \approx 8.86$. Valoarea $y_0 + 0.368(y_{\max} - y_0) \approx 0.15$ este atinsă la $t_2 \approx 12.60$. Așadar:

- 1 $K = y_{SS}/u_{SS} \approx 0.25$.
- 2 $T = t_2 - t_1 \approx 3.92$.

De notat că luăm în considerare timpul nenul t_1 la care este aplicat impulsul!

Exemplu: Modelul ca funcție de transfer

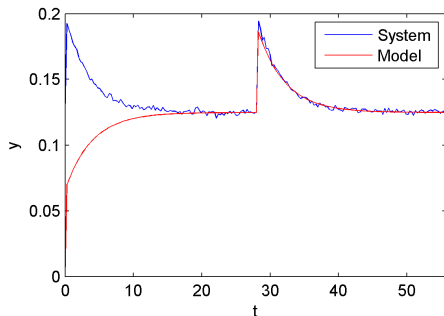
$$\hat{K} = 0.25$$

$$\hat{T} = 3.92$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}}{\hat{T}s + 1} = \frac{0.25}{3.92s + 1}$$

Exemplu: Validare

Comparăm datele de la sistem cu răspunsul modelului la intrarea de validare (impulsurile 2 și 3):



Simularea nu ia în considerare condițiile inițiale nenule ale sistemului, și de aceea partea inițială are diferențe mari.

Vom prezenta o metodă de simulare din condiții inițiale nenule, care funcționează nu doar pentru impulsuri, ci pentru *orice* semnal de intrare (treaptă, etc.).

Model în spațiul stărilor pentru un sistem de ordinul n

Un **model în spațiul stărilor**, în timp continuu, reprezintă un sistem liniar sub forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

unde:

- x este vectorul de stare, $x \in \mathbb{R}^n$ cu n ordinul sistemului
- u și y sunt intrarea și ieșirea obișnuite. Pot fi vectori dacă sistemul are mai multe intrări sau ieșiri, dar aici semnale scalare sunt suficiente.
- Matricile A de stare, B de intrare, C de ieșire, D de transfer direct. Acestea au dimensiunile potrivite, aici: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (vector datorită intrării scalare), $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (vector datorită ieșirii scalare), $D \in \mathbb{R}$ (un scalar, de obicei 0).



Model în spațiul stărilor pentru un sistem de ordinul 1

Pornind de la funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

și întorcându-ne în domeniul timp, dinamica sistemului este:

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{T}y(t) + \frac{K}{T}u(t)$$

Luând $x = y$ (cum sistemul este de ordinul 1, o singură variabilă de stare este suficientă), putem scrie:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

deci modelul în spațiul stărilor are $A = -\frac{1}{T}$, $B = \frac{K}{T}$, $C = 1$, $D = 0$.

Înapoi la exemplu: Model aproximat în spațiul stărilor

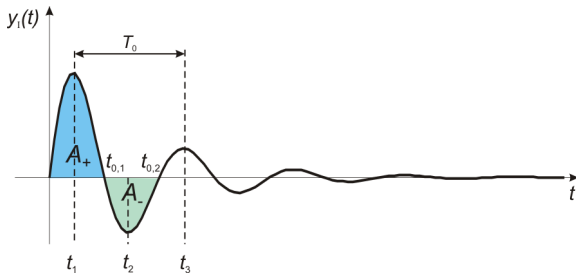
$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\widehat{T}}x(t) + \frac{\widehat{K}}{\widehat{T}}u(t) = -0.26x(t) + 0.06u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

Matlab: `HSS = ss(A, B, C, D)`

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale

Răspunsul la impuls subamortizat

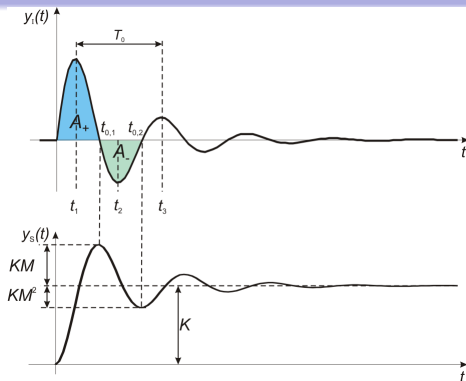


Folosind derivata răspunsului la treaptă calculată mai sus, avem răspunsul la impuls:

$$y_1(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$$

Observăm deja că perioada este neschimbată, deci $T_0 = t_3 - t_1 = 2(t_2 - t_1)$.

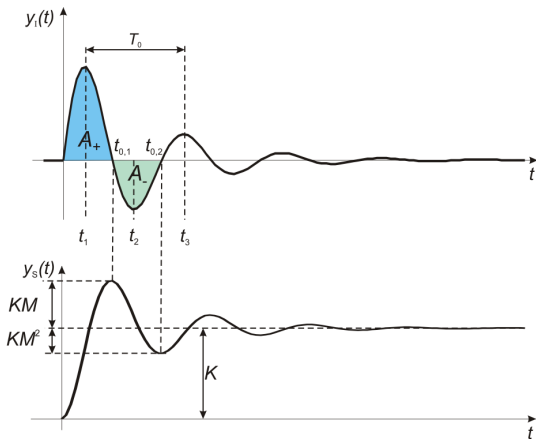
Răspunsul la impuls subamortizat (continuare)



Cum $y_S(t) = \int_0^t y_I(\tau) d\tau$, și reamintindu-ne valorile primului maxim și minim din răspunsul la treaptă în funcție de suprareglajul M :

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} y_I(\tau) d\tau = y_S(t_{0,1}) = K + KM, \quad A_- = - \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} y_I(\tau) d\tau = \\ = -[y_S(t_{0,2}) - y_S(t_{0,1})] = -[K - KM^2 - (K + KM)] = KM^2 + KM$$

Răspunsul la impuls subamortizat (continuare)



Obținem așadar:

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{KM^2 + KM}{K + KM} = M$$

Determinarea parametrilor

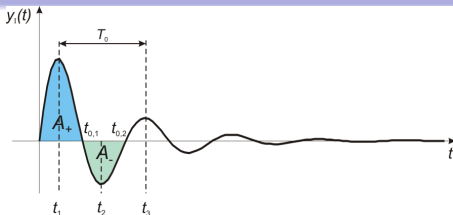
Dat fiind răspunsul la impuls al unui sistem necunoscut:

Algoritm

- 1 Determină ieșirea și intrarea staționară y_{ss} , u_{ss} . Factorul de proporționalitate este $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$.
- 2 Citește valorile de timp unde $y(t)$ intersectează y_{ss} : $t_{0,1}$, $t_{0,2}$. Calculează ariile $A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau$,
 $A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau$. Găsește suprareglajul $M = \frac{A_-}{A_+}$.
- 3 Factorul de amortizare este $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 M}}$.
- 4 Citește valorile de timp la maxime, t_1 , t_3 , sau la maxim și minim t_1 , t_2 . Calculează perioada $T_0 = t_3 - t_1$, sau $T_0 = 2(t_2 - t_1)$.
- 5 Pulsația naturală: $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}}$, sau $\omega_n = \frac{2}{T_0} \sqrt{\pi^2 + \log^2 M}$.

De notat că relațiile între M , T_0 , ξ , și ω_n sunt valide în general, deci pașii 3 și 5 folosesc aceleași formule ca și pentru treaptă.

Estimarea lui K în condiții inițiale nule



Rezolvăm $\dot{y}(t) = 0$ pentru a obține t_1 pentru primul maxim, și îl înlocuim în $y(t)$ pentru a obține valoarea maximă în sine. Obținem după câteva calcule:

$$y(t_1) = K\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

relație ce poate fi folosită pentru a estima factorul de proporționalitate: $K = \frac{y(t_1)}{\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$. Este nevoie de ξ și ω_n , care pot fi calculate cu metodele de mai sus independent de condiția inițială.

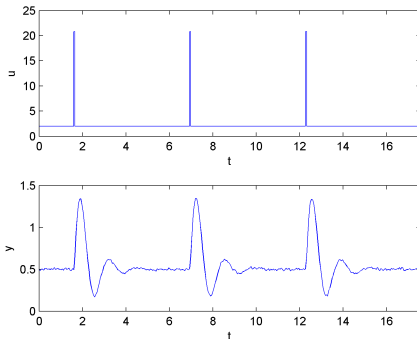
Din aceleași motive ca la ordinul 1, această metodă este mai puțin precisă decât determinarea lui K din valori staționare nenule.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
 - Remarci adiționale

Exemplu de ordinul 2

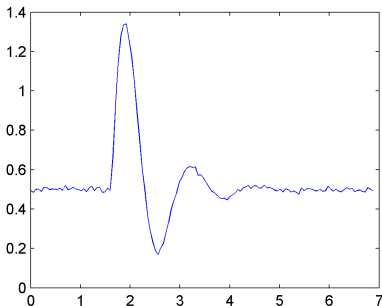
Simulare, 330 de eşantioane cu perioada de eşantionare ≈ 0.053 .



Din nou avem condiții inițiale nenule, și ca de obicei zgomot de măsurare.

Vom folosi primul impuls pentru identificare și celelalte două pentru validare.

Exemplu: Valori staționare și factor de proporționalitate

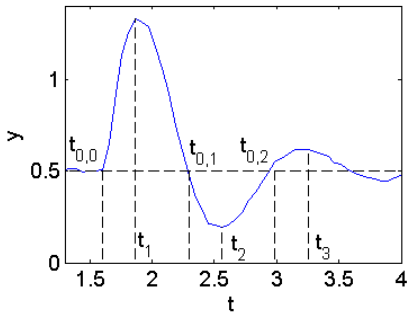


Avem $u_0 = u_{ss} = 2$.

Determinăm ieșirea staționară (egală cu cea inițială) prin efectuarea mediei ultimelor 11 eșantioane:

$$y_{ss} = y_0 \approx \frac{1}{11} \sum_{k=120}^{130} y(k) \approx 0.5$$

Exemplu: Factor de amortizare (continuare)



Din aceste arii, $M = \frac{A_-}{A_+} \approx 0.36$, și $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 M}} \approx 0.31$.

Exemplu: Modelul ca funcție de transfer

$$\hat{K} = 0.25$$

$$\hat{\xi} = 0.31$$

$$\hat{\omega}_n = 5.16$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}\hat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} = \frac{6.64}{s^2 + 3.21s + 26.68}$$

Model în spațiul stărilor pentru un sistem de ordinul 2

Reamintim că pentru a simula modelul din condiții nenule, avem nevoie de un model în spațiul stărilor $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$. Pornind de la $H(s)$ și trecând în domeniul timp:

$$\ddot{y}(t) = -2\xi\omega_n\dot{y}(t) - \omega_n^2 y(t) + K\omega_n^2 u(t)$$

Luând $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ (fiindcă sistemul are ordinul 2), scriem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -2\xi\omega_n x_2(t) - \omega_n^2 x_1(t) + K\omega_n^2 u(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\omega_n^2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{aligned}$$

de unde se obțin imediat matricile A , B , C , D .

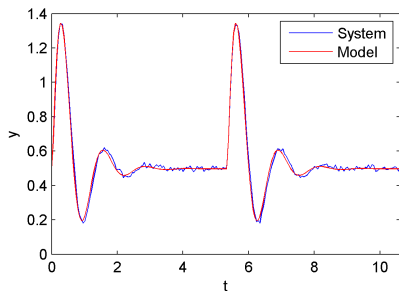
Înapoi la exemplu: Model (aproximat) în spațiul stărilor

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -26.68 & -3.22 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6.64 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [1 \quad 0] x(t) + 0u(t)$$

unde x este vectorul de stare, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

Exemplu: Validare

Pentru a porni din condiția inițială nenulă, inițializăm $x_1(0) = y_0$, $x_2(0) = 0$ la începutul simulării (pornim din regim staționar, de aceea $x_2(0) = \dot{y}(0) = 0$).



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare:

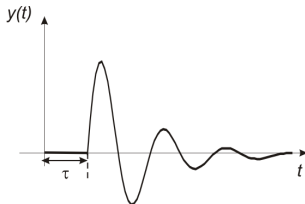
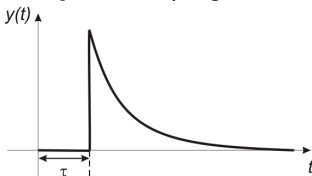
$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \approx 8 \cdot 10^{-4}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - **Remarci adiționale**

Timp mort

Ca și cel la treaptă, răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul 1 sau 2 **cu timpul mort** τ are forma tipică, dar după schimbarea intrării există o întârziere τ până când efectul se propagă la ieșire. Valoarea lui τ se citește direct pe grafic.



Funcții de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-s\tau}, \quad H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-s\tau}$$

Rezumat răspuns la impuls

- Răspuns la impuls = derivata răspunsului la treaptă.
- Factor de proporționalitate K : ieșire / intrare în condiții inițiale nenule, altfel din valoarea maximă.
- Ordin 1: constanta de timp T găsită pe axa *timp* când axa *ieșire* atinge 36.8% din diferență.
- Ordin 2: perioada T_0 citită pe grafic, suprareglajul M calculat prin integrare numerică. Rezultă ξ, ω_n .
- Model în spațiul stărilor pentru condiții inițiale diferite de zero.