Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu

Partea IV

Analiza de corelaţie

Motivaţie 1

De ce alte metode pe lângă de analiza în domeniul timp?

Analiza în domeniul timp a răspunsurilor la treaptă şi impuls:

- Se poate aplica doar pentru câteva valori ale ordinului sistemului
- Trebuie de obicei efectuată (semi-)manual
- Produce un model imprecis, euristic al sistemului

Metodele de identificare pe care le vom discuta mai departe:

- Funcţionează pentru orice ordin al sistemului
- Furnizează algoritmi automaţi, complet implementabili
- Garantează acurateţea soluţiei (în anumite condiţii tehnice)

Motivaţie 2

De ce analiza de corelaţie?

- Cea mai apropiată de analiza în domeniul timp (modelul este răspunsul la impuls)
- Model “cu adevărat” neparametric
- O metodă “simplă” din rândul tehnicilor generale de identificare

Clasificare

Reamintim taxonomia modelelor din Partea I:

După numărul de parametri:

1. Modele parametrice: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut şi de obicei mic de parametri
2. Modele neparametrice: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri
   Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoştinţele disponibile în avans ("culoare"):

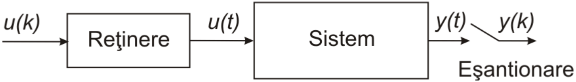
1. Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
2. Modele cutie neagră: complet necunoscute în avans
3. Modele cutie gri: parţial cunoscute

Analiza de corelaţie este o metodă cu adevărat neparametrică; produce un *model sub formă de răspuns la impuls*.

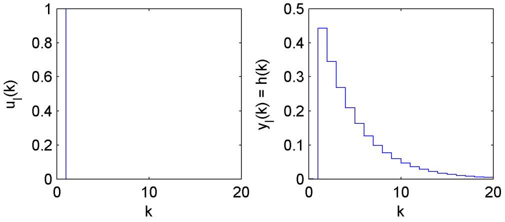
Conţinut

1. Metoda ideală a analizei de corelaţie
2. Un algoritm practic. Modelul FIR
3. Exemplu Matlab
4. Garanţie de acurateţe (simplificată)

Reamintim: model în timp discret



Răspunsul discret la impuls



Semnal impuls unitar în timp discret:

$$u_{\mathrm{I}}(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

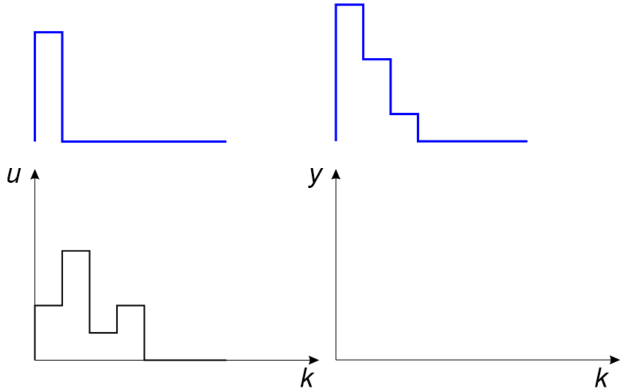
(nu are aria 1, fiind aşadar diferit de realizarea în timp discret a impulsului continuu!)

Răspuns discret la impuls:

$$y_I(k) = h(k), \quad k \geq 0$$

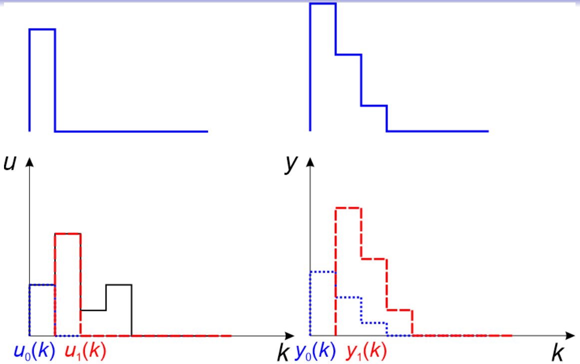
$h(k), k \geq 0$ se numeşte şi funcţia pondere a sistemului.

Model răspuns la impuls: Problemă



Se dă o intrare în timp discret $u(k)$. Obiectivul este găsirea ieşirii rezultante $y(k)$.

Model răspuns la impuls: Descompunerea intrării



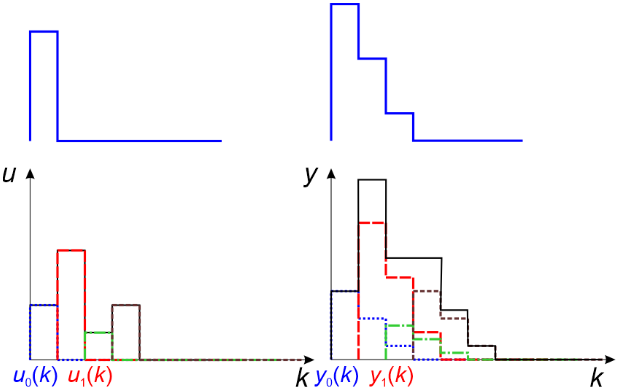
Luăm semnalul $\tilde{u}_j(k)$ egal $u(j)$ at $k = j$, şi 0 în rest; $\tilde{u}_j(k)$ este o versiune deplasată şi scalată a impulsului unitar:

$$\tilde{u}_j(k) = u(j)u_{\mathrm{I}}(k - j)$$

Răspunsul la $\tilde{u}_j(k)$ este aşadar o versiune deplasată şi scalată a răspunsului la impuls:

$$\tilde{y}_j(k) = u(j)h(k - j)$$

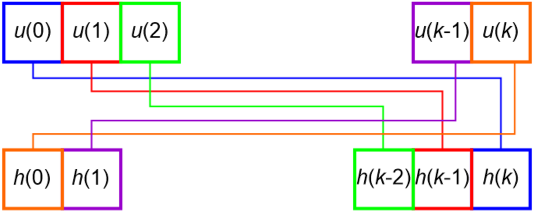
Model răspuns la impuls: Superpoziţie



Dar $u(k)$ = superpoziţia mai multor semnale $\tilde{u}_j$, şi datorită liniarităţii:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} \tilde{y}_j(k) = \sum_{j=0}^{k} u(j)h(k-j)$$

Model răspuns la impuls: Convoluţie



$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} \tilde{y}_j(k) = \sum_{j=0}^{k} u(j)h(k-j) = \sum_{j=0}^{k} h(j)u(k-j) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j)$$

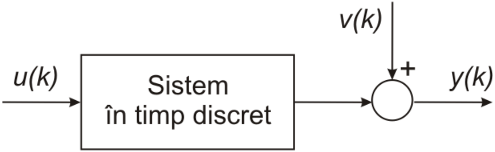
unde am presupus condiţii iniţiale zero, i.e. $u(j) = 0 \forall j < 0$.

Model de tip răspuns la impuls

Răspunsul la o intrare arbitrară $u(k)$ este *convoluţia* intrării cu răspunsul discret la impuls:

$$\boxed{y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j) + v(k)}$$

unde am inclus pe lângă modelul ideal şi o componentă de perturbaţie $v(k)$.



Ipoteze

Ipoteze

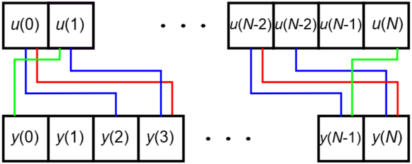
1. Intrarea $u(k)$ este un proces stohastic staţionar.
2. Intrarea $u(k)$ şi perturbaţia $v(k)$ sunt independente.

Reamintim:

- Independenţa variabilelor aleatoare.
- Proces stohastic staţionar: aceeaşi medie la orice moment de timp, covarianţa depinde doar de diferenţa între paşii de timp.

Funcţia de covarianţă intrare-ieşire

$$r_{yu}(\tau) = \mathrm{E}\left\{y(k+\tau)u(k)\right\} \quad \left(= \frac{1}{\#}\sum_k y(k+\tau)u(k) \right)$$



De exemplu:

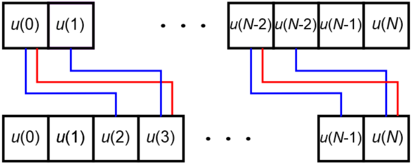
$$r_{yu}(2) = \mathrm{E}\left\{y(k+2)u(k)\right\} = \frac{1}{\#}\sum_k y(k+2)u(k)$$

$$r_{yu}(3) = \mathrm{E}\left\{y(k+3)u(k)\right\}$$

$$r_{yu}(-1) = \mathrm{E}\left\{y(k-1)u(k)\right\} = \mathrm{E}\left\{y(k)u(k+1)\right\}$$

Funcţia de covarianţă a intrării

$$r_u(\tau) = r_u(-\tau) = \mathrm{E}\left\{u(k+\tau)u(k)\right\} \left(= \frac{1}{\#} \sum_k u(k+\tau)u(k) \right)$$



De exemplu:

$$r_u(2) = r_u(-2) = \mathrm{E}\left\{u(k+2)u(k)\right\}$$
$$r_u(3) = r_u(-3) = \mathrm{E}\left\{u(k+3)u(k)\right\}$$

Observaţii: r_u este simetrică, iar r_{yu}, r_u sunt covarianţele adevărate doar dacă intrarea şi ieşirea sunt de medie zero. Dacă această condiţie nu este satisfăcută, atunci mediile nonzero trebuiesc eliminate din semnale înainte de a aplica algoritmul.

Relaţia între covarianţe şi răspunsul la impuls

Dacă nu ar exista perturbaţii, atunci:

$$\begin{aligned} r_{yu}(\tau) &= \mathrm{E}\left\{y(k+\tau)u(k)\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{\left[\sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k+\tau-j)\right] u(k)\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h(j)\mathrm{E}\left\{u(k+\tau-j)u(k)\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)r_u(\tau-j) \end{aligned}$$

Erorile generate de perturbaţii sunt tratate implicit mai târziu, folosind regresia liniară.

Identificarea răspunsului la impuls

Scriem ecuaţia covarianţelor pentru toate valorile τ:

$$r_{yu}(0) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) r_u(-j) = h(0)r_u(0) + h(1)r_u(-1) + h(2)r_u(-2) + \dots$$

$$r_{yu}(1) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) r_u(1-j) = h(0)r_u(1) + h(1)r_u(0) + h(2)r_u(-1) + \dots$$

$$\dots$$

obţinând (în principiu) un sistem infinit de ecuaţii liniare:

- Coeficienţii sunt $r_u(\tau)$, $r_{yu}(\tau)$.
- Necunoscutele sunt $h(0), h(1), \dots$: soluţia sistemului.

Structura sistemului liniar

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) r_u(-j) = h(0) r_u(\tau) + h(1) r_u(\tau - 1) + h(2) r_u(\tau - 2) + \ldots$$

$$\boxed{r_u(0)}\,\boxed{r_u(1)}\,\boxed{r_u(2)}\,\boxed{r_u(3)} \quad \cdots$$

$$\begin{bmatrix} r_{yu}(0) \\ r_{yu}(1) \\ r_{yu}(2) \\ r_{yu}(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \cdots & & & \\ r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \cdots & & \\ r_u(2) & r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \cdots & \\ r_u(3) & r_u(2) & r_u(1) & r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & r_u(3) & \cdots \\ \vdots & & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Urmează un algoritm practic, ce foloseşte un set finit de date.

Conţinut

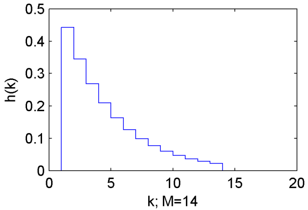
1 Metoda ideală a analizei de corelaţie

2 Un algoritm practic. Modelul FIR

3 Exemplu Matlab

4 Garanţie de acurateţe (simplificată)

Modelul răspuns finit la impuls



Impunem condiţia $h(k) = 0$ pentru $k \geq M$. Obţinem modelul de tip răspuns finit la impuls (en. *finite impulse response*, FIR):

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + v(k)$$

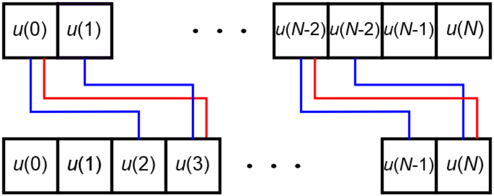
De notat: M trebuie selectat pentru a avea $MT_s \gg$ constantele de timp dominante (sistemul să fie aproape în regim staţionar)

Obţinerea covarianţelor din date: r_u

Se dau semnalele $u(k), y(k)$, unde $k = 0, \ldots, N$.
Pentru valori pozitive τ, avem:

$$\begin{aligned} r_u(\tau) &= \mathrm{E}\left\{u(k+\tau)u(k)\right\} \\ &\approx \boxed{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-\tau} u(k+\tau)u(k)} \\ &=: \widehat{r}_u(\tau), \qquad \forall \tau \geq 0 \end{aligned}$$

şi $\widehat{r}_u(-\tau) = \widehat{r}_u(\tau)$ datorită simetriei.



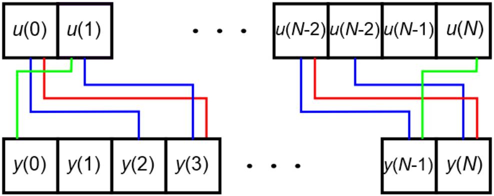
Obţinerea covarianţelor din date: r_{yu}

Pentru valori τ pozitive şi negative:

$$r_{yu}(\tau) = \mathrm{E}\left\{y(k+\tau)u(k)\right\}$$

$$\approx \boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-\tau} y(k+\tau)u(k) & \text{dacă } \tau \geq 0 \\ \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=-\tau}^{N} y(k+\tau)u(k) & \text{dacă } \tau < 0 \end{cases}}$$

$$=: \widehat{r}_{yu}(\tau), \qquad \forall \tau \geq 0$$



Modelul răspuns finit la impuls

Model FIR:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + v(k)$$

Ecuaţia covarianţelor este trunchiată în acelaşi fel:

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)r_u(\tau - j)$$

Sistem liniar de ecuaţii

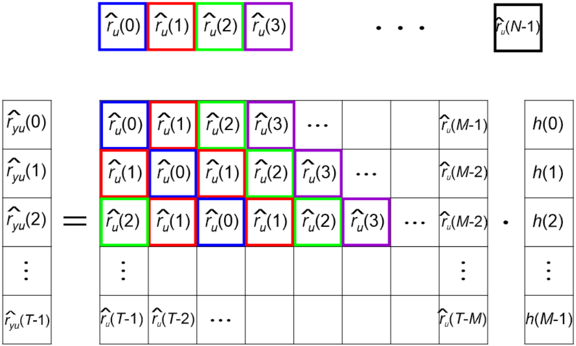
Folosind $\widehat{r}_{yu}$, $\widehat{r}_u$ estimate din date, scriem ecuaţiile trunchiate pentru $\tau = 0, \dots, T-1$ (ţinând cont că $\widehat{r}_u(-\tau) = \widehat{r}_u(\tau)$):

$$
\begin{aligned}
\widehat{r}_{yu}(0) &= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\widehat{r}_u(-j) \\
&= h(0)\widehat{r}_u(0) + h(1)\widehat{r}_u(1) + \ldots + h(M-1)\widehat{r}_u(M-1) \\
\widehat{r}_{yu}(1) &= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\widehat{r}_u(1-j) \\
&= h(0)\widehat{r}_u(1) + h(1)\widehat{r}_u(0) + \ldots + h(M-1)\widehat{r}_u(M-2) \\
\ldots \\
\widehat{r}_{yu}(T-1) &= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)\widehat{r}_u(T-1-j) \\
&= h(0)\widehat{r}_u(T-1) + h(1)\widehat{r}_u(T-2) + \ldots + h(M-1)\widehat{r}_u(T-M)
\end{aligned}
$$

– un sistem liniar de T ecuaţii cu M necunoscute $h(0), \ldots, h(M-1)$.

Sistem liniar: formă matriceală

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{yu}(0) \\ \hat{r}_{yu}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yu}(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_u(0) & \hat{r}_u(1) & \dots & \hat{r}_u(M-1) \\ \hat{r}_u(1) & \hat{r}_u(0) & \dots & \hat{r}_u(M-2) \\ \vdots & & & \\ \hat{r}_u(T-1) & \hat{r}_u(T-2) & \dots & \hat{r}_u(T-M) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}$$



Sistem liniar: Observaţii

Selecţia naivă $T = M$ ar furniza o soluţie exactă a sistemului, dar datorită zgomotului şi perturbaţiilor această soluţie ar fi supra-antrenată. Este aşadar necesar să avem $T > M$ (preferabil, $T \gg M$).

Putem acum aplica metodologia de regresie liniară (vezi Partea 3) pentru a rezolva problema.

Utilizarea modelului FIR

După ce sistemul a fost rezolvat obţinând ponderile estimate $\hat{h}$, prezicem ieşirea cu:

$$\boxed{\hat{y}(k) = \sum_{j=0}^{M-1} \hat{h}(j)u(k-j)}$$

Caz special: Intrare de tip zgomot alb

Considerăm cazul în care intrarea $u(k)$ este zgomot alb de medie zero.

Atunci, $r_u(\tau) = 0$ pentru orice $\tau \neq 0$ (zgomotul alb fiind necorelat), iar $r_{yu}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) r_u(\tau - j)$ se reduce la:

$$r_{yu}(\tau) = h(\tau) r_u(0)$$

Rezultă algoritmul foarte simplu:

$$h(\tau) = \frac{\widehat{r}_{yu}(\tau)}{\widehat{r}_u(0)}$$

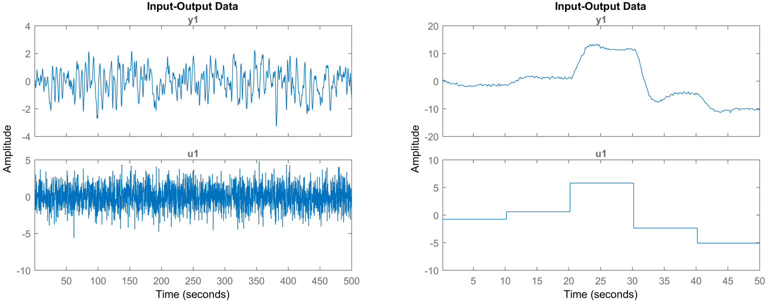
Conţinut

1. Metoda ideală a analizei de corelaţie
2. Un algoritm practic. Modelul FIR
3. Exemplu Matlab
4. Garanţie de acurateţe (simplificată)

Date experimentale

Se dau următoarele seturi de date, separate pentru identificare şi validare.

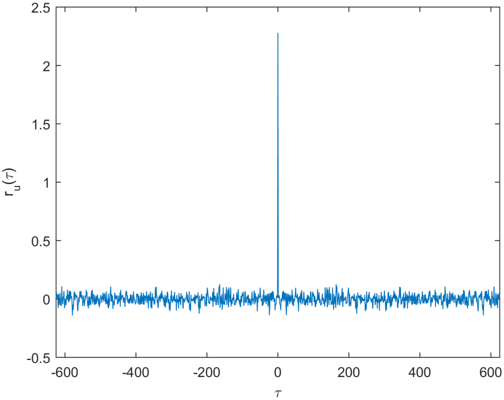
`plot(id);` and `plot(val);`



De notat că intrarea de identificare este zgomot alb, dar intrarea de validare nu este. Setul de identificare conţine 2500 de eşantioane. Observăm că semnalele sunt de medie zero.

Covarianţa intrării

`[c, tau] = xcorr(id.u);` and `plot(tau, c);`



Intrarea este zgomot alb.

Aplicarea analizei de corelaţie

`fir = cra(id, M, 0);` sau `fir = cra(id, M, 0, plotlevel);`

Argumentele funcţiei:

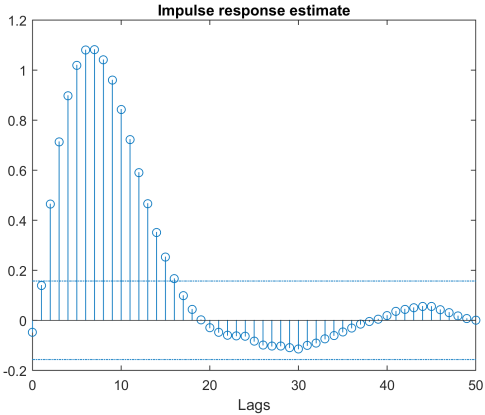
1. Datele de identificare.
2. Lungimea *M* a modelului de tip FIR, fixată aici la 45.
3. Al treilea argument egal cu 0 înseamnă ca nu se efectuează *albirea intrării*.

Tratarea intrărilor ne-ideale:

- Dacă intrarea nu are medie zero, setul de identificare trebuie trecut prin funcţia `detrend` pentru a scădea valorile medii din semnale.
- Dacă intrarea nu este zgomot alb, al treilea argument trebuie lăsat egal cu valoarea implicită (nespecificându-l, sau fixându-l egal cu o matrice vidă), ceea ce va duce la albirea semnalului de intrare.

Aplicarea analizei de corelaţie (continuare)

Implicit (sau când `plotlevel=1`) parametrii modelului FIR sunt reprezentaţi grafic împreună cu un interval de încredere de 99%.

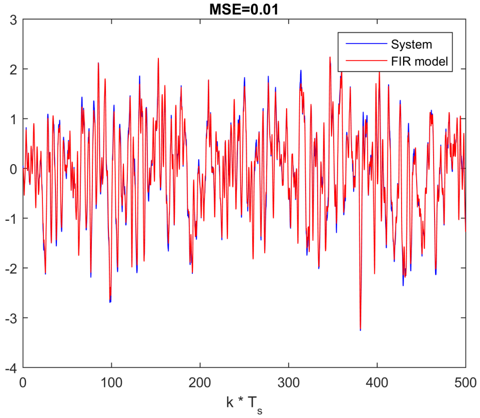


`plotlevel=2` reprezintă grafic de asemenea şi funcţiile de covarianţă.

Rezultate pe datele de identificare

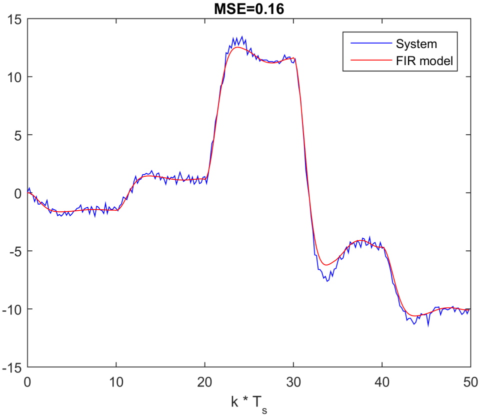
```
yhat = conv(fir, id.u); yhat = yhat(1:length(id.u));
```

Pentru a simula modelul FIR, trebuie efectuată *convoluţia* între parametrii FIR şi intrare. Ieşirea simulată este mai lungă decât este necesar, şi este aşadar trunchiată la lungimea corectă.



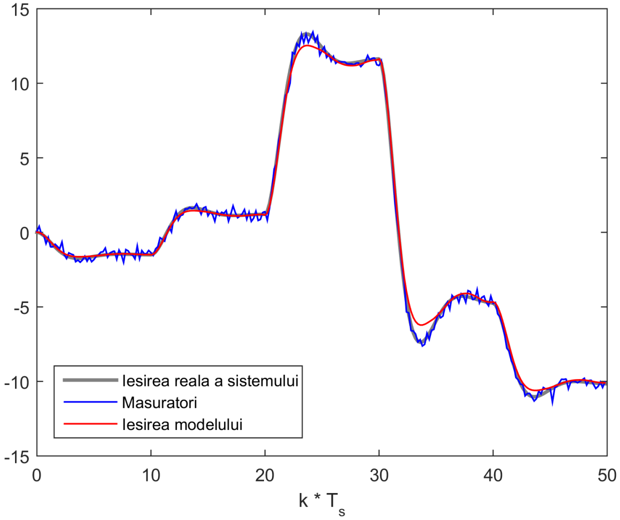
Validarea modelului FIR

```
yhat = conv(fir, val.u); yhat = yhat(1:length(val.u));
```



Rezultatele sunt rezonabile, dar nu excelente.

Detalii despre semnale



Alternativă: funcţia `impulseest`

`model = impulseest(id, M);` or `model = impulseest(id);`

Foloseşte un algoritm mai avansat decât cel studiat la curs.

Conţinut

1. Metoda ideală a analizei de corelaţie
2. Un algoritm practic. Modelul FIR
3. Exemplu Matlab
4. Garanţie de acurateţe (simplificată)

Garanţie simplificată pentru intrare zgomot alb

Ipoteză adiţională

3. Intrarea $u(k)$ este zgomot alb de medie zero.

Teoremă

Pentru intrare de tip zgomot alb, valorile estimate $\widehat{h}(\tau)$ converg la valorile reale $h(\tau)$ când numărul de eşantioane N tinde la infinit.

Observaţie: Acest tip de rezultat, în care soluţia corectă este obţinută la limita numărului infinit de date, se numeşte *consistenţă*.

Rezumat

- Semnalul impuls unitar în timp discret, şi răspunsul discret la impuls h.
- Utilizarea răspunsului la impuls ca model: convoluţie cu intrarea u.
- Cazul ideal: Funcţiile de covarianţă şi sistemul liniar de ecuaţii în h.
- Analiza de corelaţie în practică:
  - covarianţe din date finite
  - răspunsul finit la impuls (FIR)
  - sistem de ecuaţii finit-dimensional
- Exemplu Matlab.
- Garanţie de acurateţe simplificată (consistenţă în limita datelor infinite).