

# Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3  
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu



# Partea V

## Metoda ARX

# Conținut

- 1 Metoda ARX
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanție de performanță
- 4 ARX neliniar

Vom rămâne în cazul cu intrări și ieșiri scalare, cu excepția anexei. ARX neliniar este pentru proiect, nu va fi necesar pentru laboratoare.

# Clasificare

Reamintim taxonomia modelelor din Partea I:

După numărul de parametri:

- 1 **Modele parametrice**: au formă fixă (formulă matematică), număr cunoscut și de obicei mic de parametri
- 2 Modele neparametrice: nu pot fi descrise cu un număr fix, mic de parametri  
Adesea reprezentate prin grafice sau tabele

După cunoștințele disponibile în avans (“culoare”):

- 1 Modele din principii de bază, cutie albă: complet cunoscute în avans
- 2 **Modele cutie neagră**: complet necunoscute în avans
- 3 Modele cutie gri: parțial cunoscute

Metoda ARX produce modele *parametrice*, de tip polinomial.

# De ce ARX?

- Metodă pentru orice ordin, implementabilă programatic, cu garanții – ca și analiza de corelație
- Spre deosebire de analiza de corelație, furnizează un model *compact*, numărul de parametri fiind proporțional cu ordinul sistemului

# Conținut

- 1 Metoda ARX
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanție de performanță
- 4 ARX neliniar

# Reamintim: Timp discret

Rămânem în cazul de timp discret:



**Perioada de eșantionare**  $T_s$ .

# Structura modelului ARX

În structura **ARX**, ieșirea  $y(k)$  la pasul curent este calculată din intrările și ieșirile la pași precedenți:

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_{na} y(k-na) \\ = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{nb} u(k-nb) + e(k) \end{aligned}$$

echivalent cu

$$\begin{aligned} y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_{na} y(k-na) \\ b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{nb} u(k-nb) + e(k) \end{aligned}$$

$e(k)$  este zgomotul la pasul  $k$ .

Parametrii modelului:  $a_1, a_2, \dots, a_{na}$  și  $b_1, b_2, \dots, b_{nb}$ .

**Nume:** Model **AutoRegresiv** ( $y(k)$  depinde de valorile  $y$  precedente)  
**cu intrare eXogenă** (dependență de  $u$ )



# Reprezentare polinomială

Operatorul de deplasare  $q^{-1}$ :

$$q^{-1}z(k) = z(k - 1)$$

unde  $z(k)$  este orice semnal în timp discret.

Folosind  $q^{-1}$ , avem:

$$\begin{aligned} y(k) + a_1y(k - 1) + a_2y(k - 2) + \dots + a_nay(k - na) \\ = (1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_naq^{-na})y(k) =: A(q^{-1})y(k) \end{aligned}$$

și:

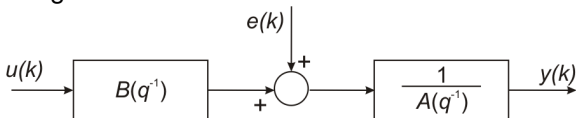
$$\begin{aligned} b_1u(k - 1) + b_2u(k - 2) + \dots + b_nbu(k - nb) \\ = (b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_nbq^{-nb})u(k) =: B(q^{-1})u(k) \end{aligned}$$

# Modelul ARX în formă polinomială

Ca urmare, modelul ARX se poate scrie compact:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

Reprezentare grafică:



fiindcă:

$$y(k) = \frac{1}{A(q^{-1})} [B(q^{-1})u(k) + e(k)]$$

**Observații:** (1) Modelul ARX este general, poate descrie orice relație liniară între intrări și ieșiri. Zgomotul participă însă în model într-o manieră restrictivă, și mai târziu vom descrie modele care generalizează acest element. (2) Fără zgomot, am avea o funcție standard de transfer în timp discret.

# Model în forma de regresie liniară

Revenind la reprezentarea explicită recursivă:

$$\begin{aligned}
 y(k) &= -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_{na} y(k-na) \\
 &\quad b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{nb} u(k-nb) + e(k) \\
 &= [-y(k-1), \dots, -y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)] \\
 &\quad \cdot [a_1, \dots, a_{na}, b_1, \dots, b_{nb}]^T + e(k) \\
 &=: \varphi^T(k) \theta + e(k)
 \end{aligned}$$

ARX se supune așadar formei standard de model din regresia liniară!

# Vectors of regressors and parameters

Vector de regresori:  $\varphi(k) \in \mathbb{R}^{na+nb}$ , ieșirile și intrările precedente.

Vector de parametri:  $\theta \in \mathbb{R}^{na+nb}$ , coeficienții polinoamelor.

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ \vdots \\ -y(k-na) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-nb) \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{na} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{nb} \end{bmatrix}$$

## ○ paranteză despre notația vectorilor

Toate variabilele vectoriale sunt implicit vectori coloană – standardul din automatică. Adeseori le scriem sub forma unor linii transpuse, pentru a economisi spațiu vertical:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = [q_1, q_2, q_3]^T$$

De notat și:  $Q^T = [q_1, q_2, q_3]$ .

De exemplu, în formula ARX:

$$y(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)] \\ \cdot [a_1, \dots, a_{na}, b_1, \dots, b_{nb}]^T + e(k) = \varphi^T(k)\theta + e(k)$$

$\varphi(k)$  este coloană, dar trebuie transformat în linie pentru ca produsul vectorial să fie corect. Deci îl transpunem:  $\varphi^T(k)$ , obținând linia  $[-y(k-1), \dots]$  (de notat că linia nu este transpusă). Pe de altă parte,  $\theta$  trebuie să fie coloană în produsul vectorial, deci nu este transpus; dar pentru conveniență îl scriem sub forma unei linii transpuse,  $[a_1, \dots]^T$  (observați transpusa!).

# Problema de identificare

Considerăm un set de date  $u(k), y(k), k = 1, \dots, N$ , din care trebuie aflați parametrii  $\theta$  ai modelului.

Pentru orice  $k$ :

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + \varepsilon(k)$$

unde  $\varepsilon(k)$  este interpretat acum ca o eroare în ecuație (de unde și notația schimbată).

**Obiectiv:** minimizarea erorii medii pătratice:

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k)^2$$

**Observație:** Când  $k \leq na, nb$ , valori ale  $u$  și  $y$  la momente de timp negative sau zero sunt necesare pentru construirea  $\varphi$ . Aceste valori pot fi luate 0 (presupunând condiții inițiale nule).

# Sistem liniar de ecuații

$$y(1) = [-y(0) \quad \cdots \quad -y(1 - na) \quad u(0) \quad \cdots \quad u(1 - nb)] \theta$$

$$y(2) = [-y(1) \quad \cdots \quad -y(2 - na) \quad u(1) \quad \cdots \quad u(2 - nb)] \theta$$

...

$$y(N) = [-y(N - 1) \quad \cdots \quad -y(N - na) \quad u(N - 1) \quad \cdots \quad u(N - nb)] \theta$$

Forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & \cdots & -y(1 - na) & u(0) & \cdots & u(1 - nb) \\ -y(1) & \cdots & -y(2 - na) & u(1) & \cdots & u(2 - nb) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N - 1) & \cdots & -y(N - na) & u(N - 1) & \cdots & u(N - nb) \end{bmatrix} \cdot \theta$$

$$Y = \Phi \theta$$

cu notațiile  $Y \in \mathbb{R}^N$  și  $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times (na + nb)}$ .

# Soluția ARX

Din regresia liniară, parametrii care minimizează  $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k)^2$  sunt:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

Cum noua funcție obiectiv  $V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k)^2$  este proporțională cu criteriul de mai sus, aceeași soluție minimizează și  $V(\theta)$ .



## Soluția pentru seturi mari de date

În cazul în care numărul  $N$  de date este foarte mare, forma de mai sus este impractică pentru identificare. O formă mai bună este cea alternativă menționată în partea de regresie liniară:

$$\Phi^T \Phi = \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k), \quad \Phi^T Y = \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k)$$
$$\Rightarrow \hat{\theta} = \left[ \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right]$$

## Soluția pentru seturi mari de date (continuare)

**O problemă rămasă:** suma celor  $N$  termeni poate fi mare, ducând la probleme numerice: (matrice de numere foarte mari) $^{-1}$  · vector de numere foarte mari.

**Soluție:** Normalizarea valorilor prin împărțirea fiecărui element cu  $N$ . În ecuații,  $N$  se simplifică deci nu are nici un efect asupra dezvoltării analitice, dar în practică această împărțire menține numerele la valori rezonabile.

$$\hat{\theta} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right]$$

Cum rămâne cu împărțirea sumei la  $N$ ? Se poate efectua recursiv, fără a implica niciodată numere mari - detalii mai târziu.

## Utilizarea modelului

**Predicție cu un pas înainte:** Secvența de ieșiri reale este cunoscută, deci toate valorile precedente sunt disponibile și pot fi înlocuite în formulă, pe lângă coeficienții extrași din  $\theta$ :

$$\hat{y}(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - \dots - a_nay(k-na) \\ + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_nbu(k-nb)$$

Semnalele la momente negative și zero de timp pot fi luate 0.

**Exemplu:** În ziua  $k-1$ , predicția meteo pentru ziua  $k$ .

**Simulare:** Ieșirile reale sunt necunoscute, trebuiesc înlocuite cu ieșirile simulate la iterații anterioare:  $y(k-i)$  înlocuit cu  $\hat{y}(k-i)$ :

$$\hat{y}(k) = -a_1\hat{y}(k-1) - a_2\hat{y}(k-2) - \dots - a_nay(k-na) \\ + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_nbu(k-nb)$$

(ieșirile simulate la pași negativi și zero pot fi și ele luate 0.)

**Exemplu:** Simularea răspunsului unui avion la comenzi ale pilotului într-o situație de urgență, care ar fi periculoasă pentru sistemul real.

# Notă despre utilizarea modelelor

Mai multe tipuri de modele se pot utiliza în **predicție** sau **simulare**, nu doar ARX.

# FIR este un caz particular de ARX

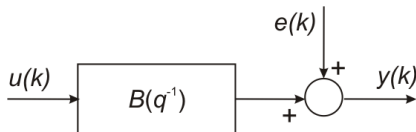
Alegând  $A = 1$  ( $na = 0$ ) în ARX, obținem:

$$y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k) = \sum_{j=1}^{nb} b_j u(k-j) + e(k)$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + e(k)$$

modelul FIR din analiza de corelație!

Mai detaliat, luăm  $nb = M - 1$  și  $b_j = h(j)$ . De notat că  $h(0)$ , răspunsul la impuls la momentul 0, se presupune egal cu 0 – adică sistemul nu răspunde instantaneu la schimbări ale intrării.



## Diferența fundamentală între ARX și FIR

$$\text{ARX: } A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

$$\text{FIR: } y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

Cum ARX include o relație recursivă între ieșirea curentă și cele precedente, este suficient să luăm ordinele  $na$  și  $nb$  egale cu ordinul sistemului dinamic.

Modelul FIR are nevoie de un ordin  $nb$  (lungime  $M$ ) suficient de mare pentru a modela întregul regim tranzitoriu al răspunsului la impuls (în mod ideal recuperăm modelul corect doar dacă  $M \rightarrow \infty$ ).

⇒ mai mulți parametri ⇒ mai multe date necesare pentru identificare.

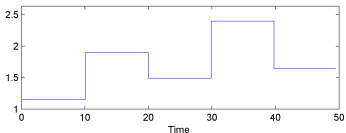
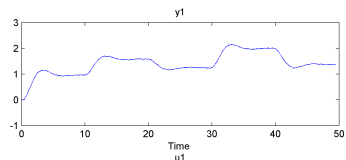
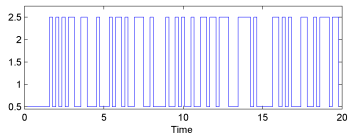
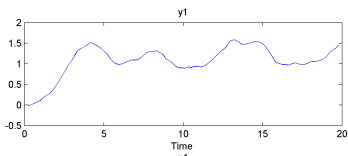
# Conținut

- 1 Metoda ARX
- 2 Exemplu Matlab**
- 3 Garanție de performanță
- 4 ARX neliniar

# Date experimentale

Se dau două seturi de date, unul pentru identificare, celălalt pentru validare.

```
plot(id); și plot(val);
```



**Observații:** Intrarea de identificare: *semnal pseudo-aleator binar*.  
Intrarea de validare: o secvență de semnale treaptă.



# Identificarea unui model ARX

```
model = arx(id, [na, nb, nk]);
```

Argumente funcție:

- 1 Datele de identificare.
- 2 Vector conținând ordinele  $A$  și  $B$ , și întârzierea  $nk$ .

Structura diferită de cea teoretică: include o întârziere minimă  $nk$  între intrări și ieșiri, utilă pentru a modela sistemele cu timp mort.

$$y(k) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_nay(k-na) \\ = b_1u(k-nk) + b_2u(k-nk-1) + \dots + b_nbu(k-nk-nb+1) + e(k)$$

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-nk) + e(k), \text{ unde:}$$

$$A(q^{-1}) = (1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_naq^{-na})$$

$$B(q^{-1}) = (b_1 + b_2q^{-1} + b_nbq^{-nb+1})$$

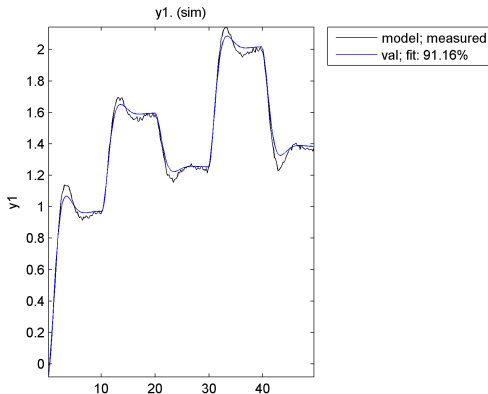
Structura teoretică se obține luând  $nk = 1$ . Pentru  $nk > 1$ , noua structură se poate transforma în cea teoretică alegând un polinom  $B$  de ordinul  $nk + nb - 1$ , cu primii  $nk - 1$  coeficienți nuli:

$$B_{\text{theor}}(q^{-1}) = 0q^{-1} + \dots + 0q^{-nk+1} + b_1q^{-nk} + \dots + b_nbq^{-nk-nb+1}$$

# Validarea modelului

Presupunând că sistemul este de ordinul 2, *în forma ARX*, și fără întârzieri, alegem  $na = 2$ ,  $nb = 2$ ,  $nk = 1$ . Validare:

```
compare(model, val);
```



Rezultatele nu sunt bune.

## Selecția structurii

Alternativă: încercăm mai multe structuri diferite și o alegem pe cea mai bună.

```
Na = 1:15;  
Nb = 1:15;  
Nk = 1:5;  
NN = struc(Na, Nb, Nk);  
V = arxstruc(id, val, NN);
```

- `struc` generează toate combinațiile de ordine în `Na`, `Nb`, `Nk`.
- `arxstruc` identifică pentru fiecare combinație un model ARX (pe datele din primul argument), îl simulează (pe datele din al doilea argument), și returnează toate valorile MSE pe prima linie din `V` (vezi `help arxstruc` pentru formatul variabilei `V`).

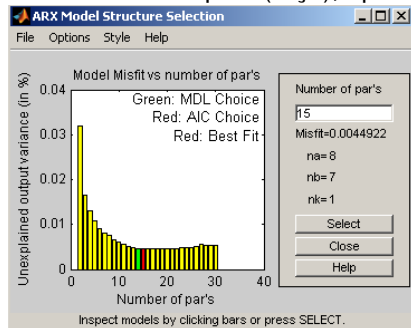
## Selecția structurii (continuare)

Pentru a alege structura cu valoarea MSE minimă:

$$N = \text{selstruc}(V, 0);$$

Pentru datele noastre,  $N = [8, 7, 1]$ .

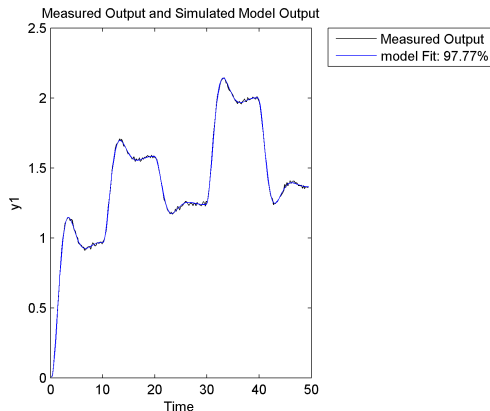
Alternativ, selecție grafică:  $N = \text{selstruc}(V, 'plot');$ ; Click pe bara corespunzătoare modelului optim (roșu), apoi “Select”, “Close”.



(Mai târziu vom discuta selecția între modele alternative cu alte criterii decât MSE.)

# Validarea celui mai bun model ARX

```
model = arx(id, N); compare(model, val);
```



Rezultatele sunt mai bune. Sistemele de ordinul 8 sunt însă destul de rare în practică, probabil se întâmplă ceva mai complicat... vom relua ideea în cursurile următoare.

# Conținut

- 1 Metoda ARX
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanție de performanță**
- 4 ARX neliniar

# Rezultat

## Ipoteze

- 1 Există un vector corect de parametri  $\theta_0$  pentru care:

$$y(k) = \varphi^\top(k)\theta_0 + v(k)$$

unde  $v(k)$  este un proces stohastic staționar independent de  $u(k)$ .

- 2  $E \{ \varphi(k)\varphi^\top(k) \}$  este o matrice inversabilă.
- 3  $E \{ \varphi(k)v(k) \} = 0$ .

## Teoremă

Identificarea ARX este **consistentă**: parametrii estimați  $\hat{\theta}$  converg la cei corecți  $\theta_0$ , la limită când numărul de date crește la infinit  $N \rightarrow \infty$ .

# Discuție ipoteze

- 1 Ipoteza 1 este echivalentă cu existența unor polinoame corecte  $A_0(q^{-1})$ ,  $B_0(q^{-1})$  pentru care:

$$A_0(q^{-1})y(k) = B_0(q^{-1})u(k) + v(k)$$

Pentru a motiva Ipoteza 2, reamintim

$$\hat{\theta} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \right]$$

Când  $N \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \rightarrow E \{ \varphi(k)\varphi^T(k) \}$ .

- 2  $E \{ \varphi(k)\varphi^T(k) \}$  este inversabilă dacă datele sunt “suficient de informative” (de ex.  $u(k)$  nu trebuie să fie un feedback simplu de la  $y(k)$ ; vezi Söderström & Stoica pentru discuții adiționale).
- 3  $E \{ \varphi(k)v(k) \} = 0$  de ex. dacă  $v(k)$  este zgomot alb. Mai târziu, vom rediscuta Ipoteza 3 și rolul condiției  $E \{ \varphi(k)v(k) \} = 0$ .



# Rezumat

- Structura de model ARX și reprezentarea cu polinoame în  $q^{-1}$
- Forma de regresie liniară cu regresori  $\varphi$  și parametri  $\theta$
- Soluția problemei de regresie liniară. Rescriere pentru seturi mari de date
- Utilizarea modelului pentru predicție și simulare
- Relația cu FIR
  
- Exemplu Matlab.
- Garanție de acuratețe simplificată.

# Conținut

- 1 Metoda ARX
- 2 Exemplu Matlab
- 3 Garanție de performanță
- 4 ARX neliniar**

# Structura ARX neliniară

Reamintim ARX standard:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_{na} y(k-na) \\ b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{nb} u(k-nb) + e(k)$$

Dependență liniară de ieșirile precedente  $y(k-1), \dots, y(k-na)$  și intrările precedente  $u(k-1), \dots, u(k-nb)$ .

ARX neliniar (NARX) generalizează la orice dependență neliniară:

$$y(k) = g(y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-na), \\ u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-nb); \theta) + e(k)$$

Funcția  $g$  este parametrizată de  $\theta \in \mathbb{R}^n$ , și acești parametri pot fi aleși pentru a recupera datele de identificare, identificând astfel un sistem dinamic neliniar.

# NARX polinomial

În cazul nostru particular,  $g$  este un **polinom de gradul  $m$  în ieșirile și intrările precedente**:

$$y(k) = p(y(k-1), \dots, y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)) + e(k) \\ =: p(d(k)) + e(k)$$

unde  $d(k) = [y(k-1), \dots, y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T$  este vectorul de semnale precedente.

De ex., pentru ordinele  $na = nb = 1$  (de unde  $d(k) = [y(k-1), u(k-1)]^T$ ) și gradul  $m = 1$ , modelul este:

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1) + c + e(k)$$

și dacă impunem în plus  $c = 0$ , recuperăm modelul ARX liniar

## NARX polinomial (continuare)

Pentru aceleași  $na = nb = 1$  și gradul  $m = 2$ :

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1) + cy(k-1)^2 + du(k-1)^2 + wu(k-1)y(k-1) + z + e(k)$$

### Observații:

- A nu se confunda cu forma polinomială liniară  
 $A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$
- Parametrii sunt acum coeficienții tuturor polinoamelor, de ex.  
 $\theta = [a, b, c, d, w, z]^T$
- Regresia liniară funcționează ca de obicei, găsind parametrii care minimizează valoarea MSE-ului!
- $y$  și  $u$  la momente zero și negative pot fi luate 0, presupunând că sistemul este în condiții inițiale nule

## Reamintim predicție versus simulare

**Predicție cu un pas înainte:** ieșirea reală a sistemului este cunoscută, deci vectorul de semnale întârziate  $d(k)$  este disponibil:

$$x(k) = [y(k-1), \dots, y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T$$

$$\hat{y}(k) = g(d(k); \hat{\theta})$$

**Simulare:** ieșirea reală este necunoscută, folosim ieșirile simulate anterior pentru a construi o *aproximare* a lui  $d(k)$ :

$$\hat{x}(k) = [\hat{y}(k-1), \dots, \hat{y}(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T$$

$$\hat{y}(k) = g(\hat{d}(k); \hat{\theta})$$

## Anexă: Intrări și ieșiri multiple

# Sistem MIMO

Până acum am considerat  $y(k) \in \mathbb{R}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}$ ,  
sisteme *Single-Input, Single-Output (SISO)*

Multe sisteme sunt *Multiple-Input, Multiple-Output (MIMO)*.  
De ex., avion. Intrări: putere motoare, eleron, elevator, cârmă.  
Ieșiri: viteză, deviații unghiulare în jurul celor trei axe.





# ARX MIMO

Mai departe considerăm  $y(k)$ ,  $e(k) \in \mathbb{R}^{ny}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^{nu}$ .

Model ARX MIMO:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

$$A(q^{-1}) = I + A_1q^{-1} + \dots + A_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = B_1q^{-1} + \dots + B_{nb}q^{-nb}$$

unde  $I$  este matricea identitate  $ny \times ny$ ,  $A_1, \dots, A_{na} \in \mathbb{R}^{ny \times ny}$ ,  
 $B_1, \dots, B_{nb} \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$ .

# Exemplu concret

Luăm  $na = 1$ ,  $nb = 2$ ,  $ny = 2$ ,  $nu = 3$ . Atunci:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

$$A(q^{-1}) = I + A_1q^{-1}$$

$$= I + \begin{bmatrix} a_1^{11} & a_1^{12} \\ a_1^{21} & a_1^{22} \end{bmatrix} q^{-1}$$

$$B(q^{-1}) = B_1q^{-1} + B_2q^{-2}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1^{11} & b_1^{12} & b_1^{13} \\ b_1^{21} & b_1^{22} & b_1^{23} \end{bmatrix} q^{-1} + \begin{bmatrix} b_2^{11} & b_2^{12} & b_2^{13} \\ b_2^{21} & b_2^{22} & b_2^{23} \end{bmatrix} q^{-2}$$

## Exemplu concret (continuare)

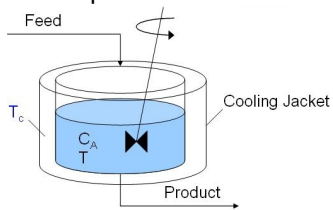
$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1^{11} & a_1^{12} \\ a_1^{21} & a_1^{22} \end{bmatrix} q^{-1} \right) \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} b_1^{11} & b_1^{12} & b_1^{13} \\ b_1^{21} & b_1^{22} & b_1^{23} \end{bmatrix} q^{-1} + \begin{bmatrix} b_2^{11} & b_2^{12} & b_2^{13} \\ b_2^{21} & b_2^{22} & b_2^{23} \end{bmatrix} q^{-2} \right) \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Relație explicită:

$$\begin{aligned} y_1(k) &+ a_1^{11} y_1(k-1) + a_1^{12} y_2(k-1) \\ &= b_1^{11} u_1(k-1) + b_1^{12} u_2(k-1) + b_1^{13} u_3(k-1) \\ &+ b_2^{11} u_1(k-2) + b_2^{12} u_2(k-2) + b_2^{13} u_3(k-2) + e_1(k) \\ y_2(k) &+ a_1^{21} y_1(k-1) + a_1^{22} y_2(k-1) \\ &= b_1^{21} u_1(k-1) + b_1^{22} u_2(k-1) + b_1^{23} u_3(k-1) \\ &+ b_2^{21} u_1(k-2) + b_2^{22} u_2(k-2) + b_2^{23} u_3(k-2) + e_2(k) \end{aligned}$$

## Exemplu Matlab

Considerăm un reactor de tip *continuous stirred-tank reactor*, CSTR:



Credit imagine: mathworks.com

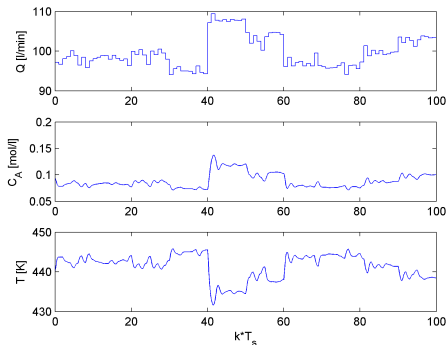
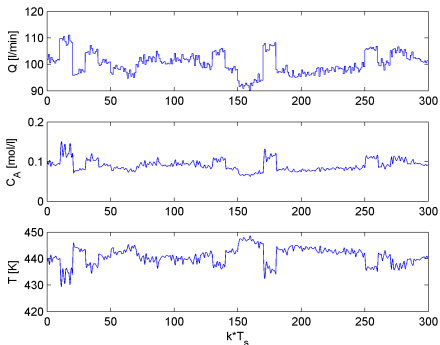
**Intrare:** debit  $Q$  al agentului de răcire

**Ieșiri:**

- Concentrația  $C_A$  a substanței  $A$  în amestec
- Temperatura  $T$  a amestecului

# Matlab: Date experimentale

Stânga: identificare, Dreapta: validare



# Matlab: ARX MIMO, diferit de teorie

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

$$A(q^{-1}) = \begin{bmatrix} a^{11}(q^{-1}) & a^{12}(q^{-1}) & \dots & a^{1ny}(q^{-1}) \\ a^{21}(q^{-1}) & a^{22}(q^{-1}) & \dots & a^{2ny}(q^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{ny1}(q^{-1}) & a^{ny2}(q^{-1}) & \dots & a^{nyny}(q^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$a^{ij}(q^{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} + a_1^{ij}q^{-1} + \dots + a_{na_{ij}}^{ij}q^{-na_{ij}}$$

$$B = \begin{bmatrix} b^{11}(q^{-1}) & b^{12}(q^{-1}) & \dots & b^{1nu}(q^{-1}) \\ b^{21}(q^{-1}) & b^{22}(q^{-1}) & \dots & b^{2nu}(q^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{ny1}(q^{-1}) & b^{ny2}(q^{-1}) & \dots & b^{nynu}(q^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$b^{ij}(q^{-1}) = b_1^{ij}q^{-nk_{ij}} + \dots + b_{nb_{ij}}^{ij}q^{-nk_{ij} - nb_{ij} + 1}$$

# Matlab: Identificarea modelului

```
m = arx(id, [Na, Nb, Nk]);
```

## Argumente funcție:

- 1 Datele de identificare.
- 2 Matrici cu ordinele polinoamelor din  $A$ ,  $B$ , și întârzieri  $nk$ :

$$Na = \begin{bmatrix} na_{11} & \dots & na_{1ny} \\ \dots & & \\ na_{ny1} & \dots & na_{nyny} \end{bmatrix}$$

$$Nb = \begin{bmatrix} nb_{11} & \dots & nb_{1nu} \\ \dots & & \\ nb_{ny1} & \dots & nb_{nynu} \end{bmatrix}$$

$$Nk = \begin{bmatrix} nk_{11} & \dots & nk_{1nu} \\ \dots & & \\ nk_{ny1} & \dots & nk_{nynu} \end{bmatrix}$$

# Matlab: Rezultate

Luăm  $na = 2$ ,  $nb = 2$ , și  $nk = 1$  peste tot in elementele matricilor:

```
Na = [2 2; 2 2]; Nb = [2; 2]; Nk = [1; 1];
```

```
m = arx(id, [Na Nb Nk]);
```

```
compare(m, val);
```

