

# Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3  
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

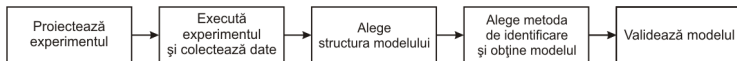
Lucian Buşoniu



## Partea VI

### Semnale de intrare

# Motivare



**Alegerea intrării** este cel mai important element al proiectării experimentului

Toate metodele de identificare impun condiții asupra semnalului de intrare, de exemplu:

- Analiza în domeniul timp necesită semnale treaptă sau impuls
- Analiza de corelație funcționează de preferință cu intrări de tip zgomot alb
- ARX necesită intrări “suficient de informative”

# Plan

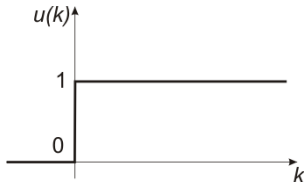
În această parte vom:

- **Revizita** semnale de intrare deja folosite
- Descrie câteva **noi tipuri de intrări**
- Explica **proprietăți** ale intrărilor, importante în identificarea sistemelor
- **Caracteriza** semnalele discutate

# Conținut

- 1 Semnale de intrare uzuale
  - Treaptă, impuls, sumă de sinusuri, zgomot alb
  - Semnal pseudo-aleator binar
- 2 Proprietăți ale intrării
- 3 Caracterizarea intrărilor uzuale

# Intrarea treaptă



Stânga: Treapta unitară:

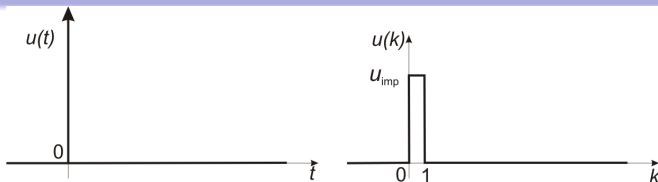
$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

Dreapta: Treaptă de amplitudine arbitrară:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ u_{ss} & k \geq 0 \end{cases}$$

Observație: Reformulări în timp discret ale variantelor continue.

# Intrarea impuls



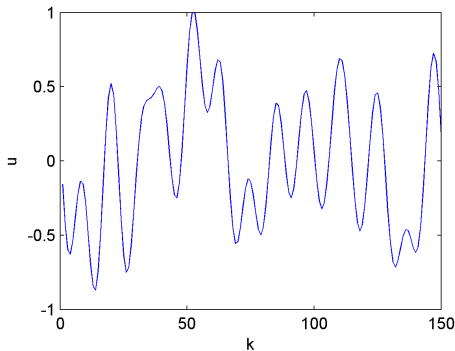
În timp discret, nu putem aproxima cum dorim impulsul ideal (stânga), fiindcă semnalul nu poate să se schimbe decât la momentele de eșantionare.

**Dreapta:** Realizarea în timp discret a impulsului:

$$u(k) = \begin{cases} u_{\text{imp}} & k = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

- Când  $u_{\text{imp}} = \frac{1}{T_s}$ , integrala semnalului este 1 și obținem o aproximare a impulsului ideal.
- Când  $u_{\text{imp}} = 1$  (de ex. în analiza de corelație), obținem un impuls “unitar” în timp discret.

# Sumă de sinusuri (multisinus)

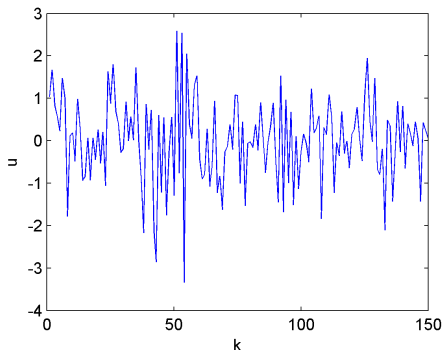


$$u(k) = \sum_{j=1}^m a_j \sin(\omega_j k + \varphi_j)$$

- $a_j$ : amplitudinile celor  $m$  componente sinusoidale
- $\omega_j$ : frecvențele,  $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m \leq \pi$
- $\varphi_j$ : fazele



# Zgomot alb



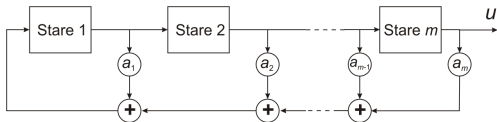
Reamintim zgomotul alb de medie zero: medie 0, semnal necorelat la pași diferiți de timp.

În figură, valorile au fost eșantionate independent dintr-o distribuție Gaussiană de medie zero.

# Conținut

- 1 **Semnale de intrare uzuale**
  - Treaptă, impuls, sumă de sinusuri, zgomot alb
  - Semnal pseudo-aleator binar
- 2 Proprietăți ale intrării
- 3 Caracterizarea intrărilor uzuale

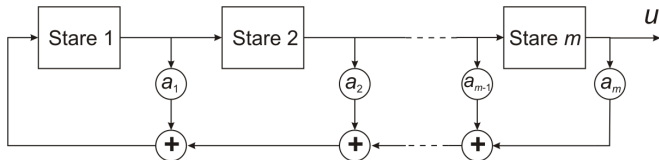
# Semnal pseudo-aleator binar (SPAB)



Semnal care comută între două valori discrete, generate cu un algoritm specific.

Interesant fiindcă aproximează zgomotul alb, și primește așadar anumite proprietăți utile ale acestuia (detaliate matematic mai târziu).

# Generator SPAB



SPAB poate fi generat cu un **registru de deplasare cu reacție liniară** (en. *linear shift feedback register*, LSFR), reprezentat în figură. Toate semnalele și toți coeficienții sunt binari (stările sunt biți).

La fiecare pas discret  $k$ :

- Starea  $x_i$  se deplasează în starea  $x_{i+1}$ .
- Starea  $x_1$  este calculată prin adunare modulo 2 a stărilor de pe calea de reacție (dacă  $a_i = 1$  atunci  $x_i$  se adună, dacă  $a_i = 0$  atunci nu).
- Ieșirea  $u(k)$  este extrasă din starea  $x_m$ .

# Adunarea modulo 2

Formula/tabelul de adevăr al adunării modulo 2:

$$p \oplus q = \begin{cases} 0 & \text{if } p = 0, q = 0 \\ 1 & \text{if } p = 0, q = 1 \\ 1 & \text{if } p = 1, q = 0 \\ 0 & \text{if } p = 1, q = 1 \end{cases}$$

...se numește și XOR (SAU exclusiv, en. *eXclusive OR*)

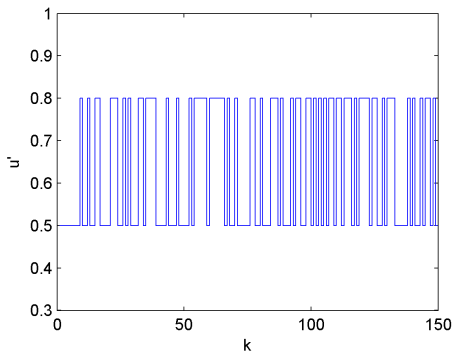
**Observație:** un astfel de registru este ușor de implementat în hardware.

# SPAB cu valori arbitrare

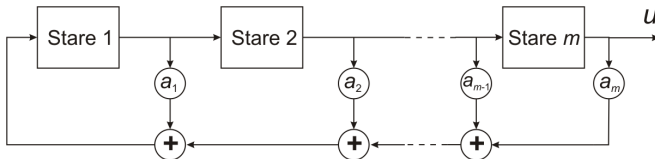
Pentru a obține un semnal  $u'(k)$  care ia valorile  $b, c$  în loc de  $0, 1$ ,  
deplasăm și scalăm semnalul original  $u(k)$ :

$$u'(k) = b + (c - b)u(k)$$

Exemplu pentru  $b = 0.5$ ,  $c = 0.8$ :



# Reprezentare în spațiul stărilor



$$x_1(k+1) = a_1 x_1(k) \oplus a_2 x_2(k) \oplus \dots \oplus a_m x_m(k)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k)$$

$$\vdots$$

$$x_m(k+1) = x_{m-1}(k)$$

$$u(k) = x_m(k)$$

Notăm cu  $x(k) = [x_1(k), \dots, x_m(k)]^T$  vectorul de stare, conținând  $m$  variabile (biți)

# Reprezentare în spațiul stărilor: Formă matriceală

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes x(k) =: A \otimes x(k)$$
$$u(k) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]x(k) =: Cx(k)$$

unde  $\otimes$  indică faptul că adunările din înmulțirea matriceală se efectuează modulo 2.



# Perioada SPAB

- Algoritmul SPAB este determinist, deci starea curentă  $x(k)$  determină exact stările și ieșirile ulterioare
- ⇒ **Perioada** (numărul de pași după care semnalul se repetă) este cel mult  $2^m$
- Starea identic nulă nu este de dorit, fiindcă secvența ulterioară ar rămâne tot timpul 0
- ⇒ Perioada maximă practică este  $P = 2^m - 1$

Un SPAB cu perioada  $P = 2^m - 1$  se numește **SPAB de lungime maximă**.

Acest tip de SPAB are proprietăți interesante, fiind preferat în aplicații.

# SPAB de lungime maximă

Perioada este determinată de coeficienții de reacție  $a_i$ .

Următorii coeficienți trebuie să fie 1 pentru a obține perioada maximă (toți restul sunt 0):

$m$	Perioadă maximă $2^m - 1$	Coeficienți egali cu 1
3	7	$a_1, a_3$
4	15	$a_1, a_4$
5	31	$a_2, a_5$
6	63	$a_1, a_6$
7	127	$a_1, a_7$
8	255	$a_1, a_2, a_7, a_8$
9	511	$a_4, a_9$
10	1023	$a_3, a_{10}$

Alte combinații valide de coeficienți există, și se pot găsi în literatură și coeficienți pentru numere mai mari de biți  $m$ .

# Funcție Matlab

```
u = idinput(N, type, [], [b, c]);
```

## Argumente:

- 1 N: lungimea semnalului (numărul de eșantioane discrete).
- 2 type: tipul semnalului, un string. Relevant pentru noi: 'prbs' pentru PRBS, 'rgs' pentru zgomot alb Gaussian, 'sin' pentru sumă de sinusuri.
- 3 (poate rămâne la valoarea implicită, matrice goală).
- 4 [b, c]: limitele semnalului, inferioară și superioară.

## Observații (vezi documentația Matlab pentru detalii):

- N poate fi configurat pentru a genera intrări multiple.
- Al treilea argument este de fapt banda de frecvențe a semnalelor.

# Conținut

- 1 Semnale de intrare uzuale
- 2 **Proprietăți ale intrării**
- 3 Caracterizarea intrărilor uzuale

# Alegerea formei intrării

Anumite metode de identificare necesită tipuri specifice de intrări:

- Analiza în domeniul timp necesită semnale treaptă sau impuls
- Analiza de corelație funcționează de preferință cu intrări de tip zgomot alb

Regulă practică: forma intrării, precum și alte caracteristici cum ar fi amplitudinea, trebuie să fie reprezentative pentru regimul tipic de operare al sistemului

# Alegerea amplitudinii intrării

Amplitudine (+/-)



- Amplitudinea permisă a intrărilor este de obicei limitată de operatorul sistemului, din motive de siguranță sau de cost
- Chiar dacă sunt permise, intrări prea mari pot duce sistemul în afara zonei de liniaritate, reducând performanța metodelor liniare de identificare
- Dar intrările prea mici vor duce la semnale dominate de zgomot și perturbații

## Alegerea perioadei de eșantionare



Pentru mai toate metodele, lucrăm în timp discret, și trebuie așadar să alegem o perioadă de eșantionare  $T_s$

- Perioade prea mari nu vor modela dinamica relevantă a sistemului. Idee inițială: 10% din constanta de timp dominantă
- Perioade prea mici vor duce la efecte prea mari ale zgomotelor și perturbațiilor
- Dacă nu suntem siguri, vom lua  $T_s$  mai mic

Datorită teoremei Nyquist-Shannon, știm că nu pot fi recuperate frecvențe ale semnalului mai mari de  $1/(2T_s)$ , așadar putem să adresăm zgomotul și alte efecte trecând ieșirile (și intrările, dacă sunt măsurate) printr-un filtru trece-jos care elimină frecvențele peste  $1/(2T_s)$

# Medie și covarianță

Dat fiind un semnal aleator  $u(k)$ , media și covarianța sa sunt:

$$\mu = E \{u(k)\}$$
$$r_u(\tau) = E \{[u(k + \tau) - \mu][u(k) - \mu]\}$$

Reamintim:

- Media și covarianța variabilelor aleatoare
- Funcția de covarianță  $r_u(\tau)$  din analiza de corelație (este înrudită, dar acolo presupuneam că media  $\mu$  este deja zero)



# Medie și covarianță: semnal determinist

Dacă semnalul este determinist (de ex. SPAB), atunci media și covarianța se redefinesc:

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k)$$

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [u(k + \tau) - \mu][u(k) - \mu]$$

**Observație:**  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cdot$  este egală cu  $\mathbf{E}\{\cdot\}$  pentru un semnal aleator.

Generalizare la semnale vectoriale  $u(k) \in \mathbb{R}^{nu}$ : interpretăm sumele element cu element, înlocuim  $[u(k + \tau) - \mu][u(k) - \mu]$  cu  $[u(k + \tau) - \mu][u(k) - \mu]^T$ , o matrice de covarianță de dimensiunea  $nu \times nu$ .

## Tratarea mediilor nonzero

- Analiza de corelație necesită semnale de medie zero
- Dar și alte metode (cum ar fi ARX sau metoda mai generală a erorii de predicție) pot funcționa mai bine dacă mediile sunt zero

Valorile medii pot fi eliminate din semnal, și eventual modelate separat

(vezi Söderström & Stoica, Capitolul 12 pentru detalii)

## Persistența excitației (PE)

Chiar și metodele care nu au nevoie de o formă specifică a răspunsului impun condiții: de ex. am spus că ARX necesită un  $u(k)$  “suficient de informativ”, fără a descrie matematic această condiție

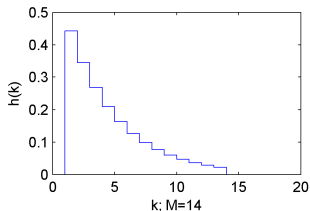
Condiția poate fi descrisă precis folosind o proprietate tehnică numită **persistența excitației**

# PE: Exemplu de motivare

Vom dezvolta o variantă *idealizată* a analizei de corelație. Această metodă este doar un pas intermediar pentru motivarea proprietății de PE, iar proprietatea va fi utilă în mulți algoritmi de identificare.

Model de tip răspuns finit la impuls (FIR):

$$y(k) = \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + v(k)$$



# Analiza de corelație: Covarianțe

Presupunând că  $u(k)$ ,  $y(k)$  sunt de medie zero, valorile medii nu trebuiesc eliminate, și covarianțele sunt:

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k + \tau)u(k)$$

$$r_{yu}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k + \tau)u(k)$$

Covarianțele trebuie estimate în practică din seturi finite de date, dar aici vom lucra cu valorile lor idealizate (rămânând în contextul exemplului de motivare, care nu va trebui de fapt implementat).

# Analiza de corelație: Identificarea modelului FIR

Scriind  $M$  ecuații pentru a găsi parametrii FIR, avem:

$$\begin{bmatrix} r_{yu}(0) \\ r_{yu}(1) \\ \vdots \\ r_{yu}(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(M-1) \\ r_u(1) & r_u(0) & \dots & r_u(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_u(M-1) & r_u(M-2) & \dots & r_u(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(M-1) \end{bmatrix}$$

Vom nota matricea din ecuație cu  $R_u(M)$ , **matricea de covarianță** a intrării.

# PE: definiție matematică

## Definiție

Un semnal  $u(k)$  are **ordinul  $n$  de persistență a excitației** dacă  $R_u(n)$  este pozitiv definită.

O matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este pozitiv definită dacă  $h^T A h > 0$  pentru orice vector nenul  $h \in \mathbb{R}^n$ . De notat că  $A$  trebuie să fie inversabilă.

## Exemple:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  este pozitiv definită. Luăm  $h = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , atunci  
 $h^T A h = a^2 + b^2$ .
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  nu este pozitiv definită. Exemplu:  $h = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$ ,  
 $h^T A h = -2a^2$ .

## PE în analiza de corelație

Dacă ordinul de PE este  $M$ , atunci  $R_U(M)$  este pozitiv definită, deci inversabilă, și sistemul liniar din analiza de corelație poate fi rezolvat pentru a găsi un FIR de lungime  $M$ .

Așadar, ordinul de PE  $M$  înseamnă că se poate identifica un FIR de lungime  $M$  (se pot găsi  $M$  parametri).



## Rolul general al PE

Pe lângă FIR, PE are un rol important în *toate* metodele parametrice de identificare, printre care ARX și alte pe care le vom discuta în cursurile următoare, de ex. metodele erorii de predicție și variabilelor instrumentale.

Un **ordin de PE suficient de mare** este necesar pentru a identifica parametrii.

De obicei, ordinul de PE necesar este un multiplu (adesea 2) al numărului de parametri  $n$  care trebuiesc estimați.

## Alternative pentru covarianță

În cele ce urmează, vom folosi următoarea definiție a covarianței:

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k + \tau)u(k)$$

ignorând faptul că această definiție este covarianța reală doar atunci când media semnalului  $u$  este zero. Funcția rămâne utilă, și este mai convenabil de calculat.

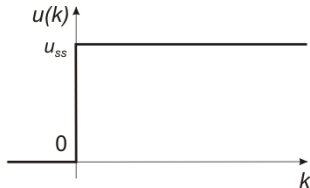
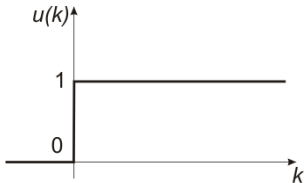
Pentru semnale de medie nonzero, definiția de mai sus va duce la un ordin de PE mai mare cu 1 decât cel obținut cu funcția de covarianță reală:

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [u(k + \tau) - \mu][u(k) - \mu]$$

# Conținut

- 1 Semnale de intrare uzuale
- 2 Proprietăți ale intrării
- 3 Caracterizarea intrărilor uzuale

# Intrare treaptă



Considerăm treapta mai generală, non-unitară:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ u_{ss} & k \geq 0 \end{cases}$$

# Intrare treaptă: Medie și covarianță

Medie și covarianță:

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k) = u_{ss}$$

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k + \tau)u(k) = u_{ss}^2$$

De notat că semnalul pornește de la  $k = 0$ , deci suma este modificată corespunzător (acest lucru nu influențează rezultatul final).

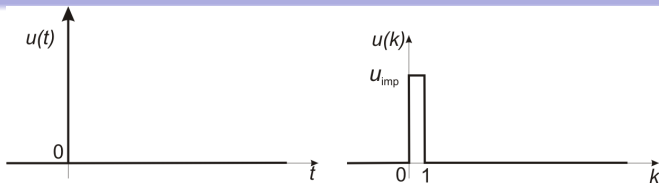
# Intrare treaptă: Ordin de PE

Matrice de covarianță:

$$R_u(n) = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ r_u(1) & r_u(0) & \dots & r_u(n-2) \\ \vdots & & & \\ r_u(n-1) & r_u(n-2) & \dots & r_u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ss}^2 & u_{ss}^2 & \dots & u_{ss}^2 \\ u_{ss}^2 & u_{ss}^2 & \dots & u_{ss}^2 \\ \vdots & & & \\ u_{ss}^2 & u_{ss}^2 & \dots & u_{ss}^2 \end{bmatrix}$$

Matricea are rangul 1, deci treapta are **ordinul de PE egal cu 1**.

# Intrare impuls



Reamintim realizarea în timp discret:

$$u(k) = \begin{cases} \frac{1}{T_s} & k = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

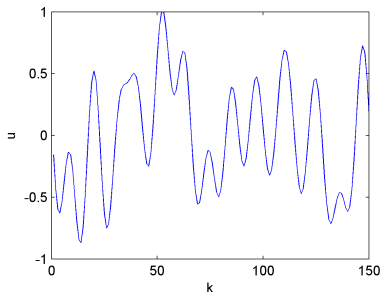
Medie și covarianță:

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k) = 0$$

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k + \tau)u(k) = 0$$

⇒ Impulsul are **ordinul de PE egal cu zero**.

# Sumă de sinusuri



$$u(k) = \sum_{j=1}^m a_j \sin(\omega_j k + \varphi_j), \quad 0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \leq \pi$$

Medie și covarianță:

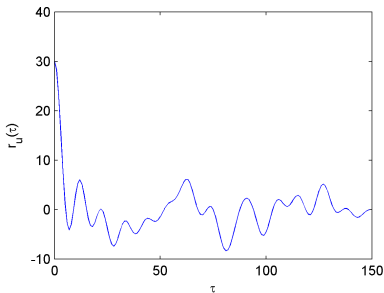
$$\mu = \begin{cases} a_1 \sin(\varphi_1) & \text{dacă } \omega_1 = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

$$r_u(\tau) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{a_j^2}{2} \cos(\omega_j \tau) + \begin{cases} a_m^2 \sin^2 \varphi_m & \text{dacă } \omega_m = \pi \\ \frac{a_m^2}{2} \cos(\omega_m \tau) & \text{altfel} \end{cases}$$



## Sumă de sinusuri (continuare)

Pentru multisinusul exemplificat pe slide-ul anterior, funcția de covarianță este:



Un multisinus cu  $m$  componente are **ordin de PE egal cu  $n$**  unde:

$$n = \begin{cases} 2m & \text{dacă } \omega_1 \neq 0, \omega_m \neq \pi \\ 2m - 1 & \text{dacă } \omega_1 = 0 \text{ sau } \omega_m = \pi \\ 2m - 2 & \text{dacă } \omega_1 = 0 \text{ și } \omega_m = \pi \end{cases}$$

## Zgomot alb: Medie și covarianță

Luăm un zgomot alb de medie zero, cu varianța  $\sigma^2$ , de ex. eșantionat independent dintr-o distribuție Gaussiană:

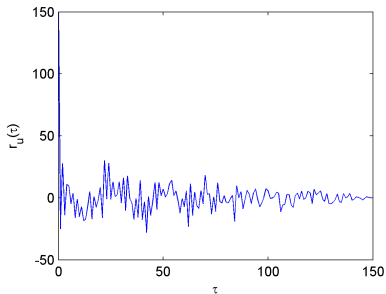
$$u(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Atunci, prin definiție:

$$\mu = 0$$
$$r_u(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{dacă } \tau = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

# Zgomot alb: Exemplu de covarianță

Funcția de covarianță a semnalului zgomot alb exemplificat anterior:



# Zgomot alb: Ordin de PE

Matrice de covarianță:

$$R_u(n) = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ r_u(1) & r_u(0) & \dots & r_u(n-2) \\ \vdots & & & \\ r_u(n-1) & r_u(n-2) & \dots & r_u(0) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n$$

unde  $I_n$  = matricea identitate, pozitiv definită.  $\Rightarrow R_u(n)$  pozitiv definită pentru orice  $n$  — zgomotul alb are **orice ordin  $n$  de PE**.

## Întrebare

Data fiind concluzia de mai sus, de ce preferă analiza de corelație semnalul de intrare de tip zgomot alb pentru a identifica modelul FIR?

## SPAB: Medie

Luăm un SPAB de lungime maximă cu valorile 0, 1 generat folosind  $m$  biți: perioada  $P = 2^m - 1$ , un număr mare.

Starea registrului LSFR  $x(k)$  va conține toate valorile binare posibile cu  $m$  cifre, cu excepția valorii identice 0.

Semnalul  $u(k)$  este ultima poziție din  $x(k)$ , care ia valoarea 1 de  $2^{m-1}$  ori, și valoarea 0 de  $2^{m-1} - 1$  ori.

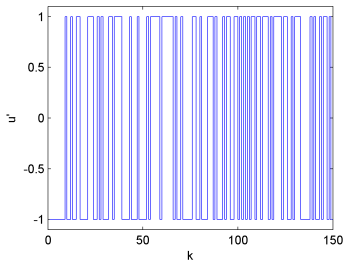
⇒ Valoare medie:

$$\mu = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P u(k) = \frac{1}{P} 2^{m-1} = \frac{(P+1)/2}{P} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2P} \approx \frac{1}{2}$$

unde aproximarea este precisă pentru  $P$  mare.

# SPAB: Covarianță

Luăm un SPAB de medie zero, scalat între  $-b$  și  $b$ :



$$u'(k) = -b + 2bu(k)$$

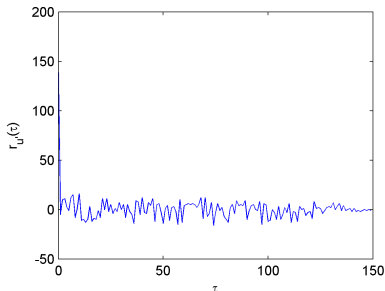
Atunci:

$$\mu = -b + 2b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2P}\right) = \frac{b}{P} \approx 0$$

$$r_u(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{P^2} \approx 1 & \text{dacă } \tau = 0 \\ -\frac{1}{P} - \frac{1}{P^2} \approx -\frac{1}{P} \approx 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

# SPAB: Exemplu de covarianță

Funcția de covarianță a semnalului SPAB de pe slide-ul anterior:



Așadar, SPAB **se comportă similar cu zgomotul alb** (are o funcție de covarianță similară). Împreună cu generarea lor ușoară, această proprietate face semnalele de tip SPAB foarte utile în identificarea sistemelor.

# SPAB: Ordin de PE

Un SPAB de lungime maximă **are ordinul de PE egal cu  $P$** , perioada (și nu mai mare).

## Exercițiu

Folosind formula care ignoră termenii de ordinul 2 ( $\frac{1}{P^2}$ ):

$$r_u(\tau) \approx \begin{cases} 1 & \text{dacă } \tau = 0 \\ -\frac{1}{P} & \text{altfel} \end{cases}$$

Iuați o valoare  $P \geq 2$  relativ mică și demonstrați că SPAB are ordinul de PE egal cu  $P$ .

**Indiciu:** construiți matricea  $R_u(n)$  pentru  $n = P$  și arătați ca are rangul  $P$ , apoi pentru  $n > P$  și arătați că are *tot* rangul  $P$ . Se poate demonstra că primele  $P$  coloane generează printr-o combinație liniară restul coloanelor  $P + 1, P + 2, \dots$