Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu

Partea VII

Metoda minimizării erorii de predicţie

Conţinut

Clasificare

Reamintim clasificarea modelelor din Partea I:

1. Modele mentale sau verbale
2. Grafice şi tabele (neparametrice)
3. Modele matematice, cu două subtipuri:
   - Modele analitice, din principii de bază
   - Modele din identificarea sistemelor

Ca şi ARX, metoda generală a minimizării erorii de predicţie (MEP) produce modele *parametrice*, polinomiale.

Conţinut

Motivaţie

MEP poate fi văzută ca o extensie a metodei ARX la structuri de model mult mai generale, fiind aşadar capabilă să identifice mult mai multe clase de sisteme.

Pentru claritate, vom prezenta întâi structura generală de model căreia i se aplică MEP.

Structura generală de model

$$y(k) = G(q^{-1})u(k) + H(q^{-1})e(k)$$

unde G şi H sunt *funcţii de transfer* în timp discret – fracţii de polinoame. Semnalul $e(t)$ este zgomot alb de medie zero.

Prin gruparea factorilor comuni ai numitoarelor din G şi H în $A(q^{-1})$, obţinem forma mai detaliată:

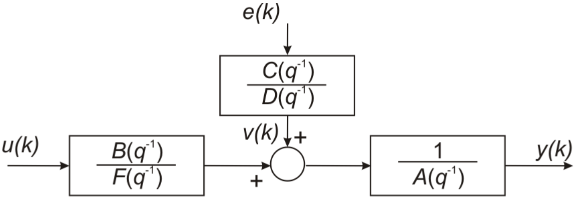
$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})}e(k)$$
$$A(q^{-1})y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(k)$$

unde A, B, C, D, F sunt toate polinoame, de ordin na, nb, nc, nd, nf:

$$A = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{na} q^{-na}$$
$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \ldots + b_{nb} q^{-nb} \qquad F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \ldots + f_{nf} q^{-nf}$$
$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_{nc} q^{-nc} \quad D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \ldots + d_{nd} q^{-nd}$$

Structura generală de model (continuare)

$$\boxed{A(q^{-1})y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(k)}$$

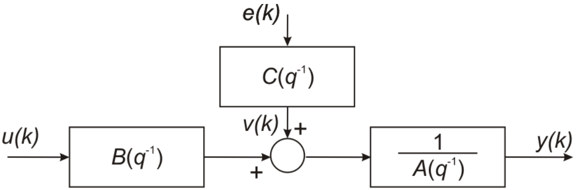


Această formă este foarte generală. Nu se va folosi în practică, ci pentru descrierea algoritmilor într-un mod generic care funcţionează pentru orice formă particulară. În practică, vom folosi una dintre aceste forme particulare, exemplificate în cele ce urmează.

Structura ARMAX

Impunând $F = D = 1$ (adică ordinele $nf = nd = 0$), obţinem:

$$\boxed{A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)}$$



Nume: AutoRegresiv, cu Medie Alunecătoare (se referă la modelul perturbaţiei) cu intrare eXogenă (dependenţa de u)

ARMAX: formă explicită

$$
\begin{aligned}
A(q^{-1})y(k) &= B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k) \\
A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{na} q^{-na} \\
B(q^{-1}) &= b_1 q^{-1} + \ldots + b_{nb} q^{-nb} \\
C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_{nc} q^{-nc}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(k) &+ a_1 y(k-1) + \ldots + a_{na} y(k-na) \\
&= b_1 u(k-1) + \ldots + b_{nb} u(k-nb) \\
&+ e(k) + c_1 e(k-1) + \ldots + c_{nc} e(k-nc)
\end{aligned}
$$

cu vectorul de parametri:

$$\theta = [a_1, \ldots, a_{na}, b_1, \ldots, b_{nb}, c_1, \ldots, c_{nc}]^\top \in \mathbb{R}^{na+nb+nc}$$

Caz special de ARMAX: ARX

Impunând $C = 1$ în ARMAX ($nc = 0$), obţinem:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

exact modelul ARX pe care l-am studiat deja.

În comparaţie cu ARX, ARMAX poate modela perturbaţii mai complicate ($C(q^{-1})e(k)$ în loc de $e(k)$, care de obicei se presupune că este zgomot alb de medie zero).

Reamintim: FIR este un caz particular al ARX

Impunând mai departe $A = 1$ ($na = 0$) în ARX, obţinem:

$$
\begin{aligned}
y(k) &= B(q^{-1})u(k) + e(k) = \sum_{j=1}^{nb} b_j u(k-j) + e(k) \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} h(j)u(k-j) + e(k)
\end{aligned}
$$

modelul FIR.

Relaţia globală

Forma generală $\supset$ ARMAX $\supset$ ARX $\supset$ FIR

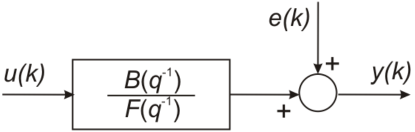
- ARMAX la ARX: Mai puţină flexibilitate în modelarea perturbaţiei.
- ARX la FIR: Mai mulţi parametri.

Structura de tip eroare de ieşire

Alte forme de model sunt posibile, care nu sunt cazuri particulare ale ARMAX, de ex. eroarea de ieşire, OE (en. *Output Error*):

$$\boxed{y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + e(k)}$$

obţinută pentru $na = nc = nd = 0$, adică $A = C = D = 1$.



Structura corespunde unui zgomot simplu, aditiv la ieşire (de unde reiese şi numele).

Exerciţiu: Care este forma explicită a modelului OE?

Conţinut

ARX reinterpretat ca MEP

1. Dat fiind vectorul de parametri θ, calculăm predicţiile la fiecare pas, $\widehat{y}(k) = \varphi^\top(k)\theta$.
2. Calculăm erorile de predicţie la fiecare pas, $\varepsilon(k) = y(k) - \widehat{y}(k)$.
3. Găsim vectorul de parametri θ care minimizează media erorilor pătratice $V(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon^2(k)$.

Procedura de mai sus este doar o reinterpretare, echivalentă cu algoritmul deja studiat la cursul de ARX.

MEP se obţine extinzând procedura la structura generală de model.

ARX reinterpretat ca MEP (continuare)

Observaţii:

- Pentru ARX, ştim deja cum să minimizăm MSE (cu regresia liniară); pentru modele mai generale vom prezenta metode noi de minimizare.
- Predictorul ARX $\widehat{y}(k)$ este ales pentru a obţine eroarea $\varepsilon(k) = e(k)$, egală cu zgomotul. Acesta va fi şi scopul MEP generale, intuitiv fiindcă nu putem spera la mai mult.
  De notat semnificaţiile diferite ale $\varepsilon(k)$ (eroare de predicţie) şi $e(k)$ (zgomot)
- Eroarea de predicţie pentru ARX este doar o rearanjare a ecuaţiei $y(k) = \varphi^\top(k)\theta + \varepsilon(k) = \widehat{y}(k) + \varepsilon(k)$.

Etapă intermediară: MEP pentru ARMAX de ordinul 1

Pentru înţelegerea mai uşoară a metodei, vom deriva întâi MEP pentru un model ARMAX de ordinul 1.

Examinând ARMAX: formă explicită, scriem modelul de ordinul 1 într-o formă uşor diferită:

$$y(k) = -ay(k-1) + bu(k-1) + ce(k-1) + e(k)$$

ARMAX de ordinul 1: predictor

Pentru a obţine eroarea $e(k)$, predictorul trebuie să fie:

$$\widehat{y}(k) = -ay(k-1) + bu(k-1) + ce(k-1) \tag{7.1}$$

Expresia depinde de zgomotul necunoscut $e(k-1)$. Putem însă deriva o formulă *dinamică*, recursivă pentru predictor care nu depinde de acest zgomot.

$$\widehat{y}(k-1) = -ay(k-2) + bu(k-2) + ce(k-2) \tag{7.2}$$

Calculând Ec. (7.1) $+c$ Ec. (7.2):

$$\begin{aligned}
&\widehat{y}(k) + c\widehat{y}(k-1) \\
&= - ay(k-1) + bu(k-1) + ce(k-1) \\
&\quad + c(-ay(k-2) + bu(k-2) + ce(k-2)) \\
&= - ay(k-1) + bu(k-1) + ce(k-1) \\
&\quad + c(-ay(k-2) + bu(k-2) + ce(k-2) + e(k-1) - e(k-1)) \\
&= - ay(k-1) + bu(k-1) + ce(k-1) + cy(k-1) - ce(k-1) \\
&= (c-a)y(k-1) + bu(k-1)
\end{aligned}$$

ARMAX de ordinul 1: predictor (continuare)

Formula recursivă finală:

$$\widehat{y}(k) = -c\widehat{y}(k-1) + (c-a)y(k-1) + bu(k-1)$$

Necesită iniţializarea lui $\widehat{y}(0)$; această valoare iniţială se ia de obicei egală cu 0.

ARMAX de ordinul 1: eroarea de predicţie

Cum dorim să minimizăm erorile de predicţie $\varepsilon(k)$, avem nevoie de o metodă pentru a le calcula.

Dinamică (formulă recursivă) similară:

$$\begin{aligned}\varepsilon(k) &= y(k) - \widehat{y}(k)\\ \varepsilon(k-1) &= y(k-1) - \widehat{y}(k-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varepsilon(k) + c\varepsilon(k-1) &= y(k) + cy(k-1) - (\widehat{y}(k) + c\widehat{y}(k-1))\\ &= y(k) + cy(k-1) - ((c-a)y(k-1) + bu(k-1))\\ &= y(k) + ay(k-1) - bu(k-1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(k) = -c\varepsilon(k-1) + y(k) + ay(k-1) - bu(k-1)$$

Necesită iniţializarea lui $\varepsilon(0)$, luat de obicei 0.

ARMAX de ordinul 1: Căutarea parametrilor

Odată ce o procedură pentru calculul erorilor este disponibilă, parametrii θ sunt găsiţi prin minimizarea funcţiei obiectiv $V(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^2(k)$. Această minimizare poate necesita evaluări multiple ale semnalului de eroare, pentru mai multe valori ale lui θ.

(Nu discutăm încă metodele prin care rezolvăm problema de minimizare. Le vom studia în detaliu în secţiunea următoare.)

În final, odată ce o estimare $\widehat{\theta}$ a optimului este găsită, formula de predicţie poate fi aplicată pentru calculul ieşirii modelului $\hat{y}(k)$.

Conţinut

Reamintim: Structura generală de model

$$y(k) = G(q^{-1})u(k) + H(q^{-1})e(k)$$

unde G şi H sunt funcţii de transfer în timp discret:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})}e(k)$$

Eroarea de predicţie

Începem prin calculul zgomotului $e(k)$.

$$y(k) = G(q^{-1})u(k) + H(q^{-1})e(k)$$
$$\Rightarrow e(k) = H^{-1}(q^{-1})(y(k) - G(q^{-1})u(k))$$

unde $H^{-1} = \frac{A(q^{-1})D(q^{-1})}{C(q^{-1})}$ este inversa fracţiei de polinoame H.

Predictorul va fi derivat în aşa fel încât eroarea de predicţie să fie egală cu zgomotul, $\varepsilon(k) = y(k) - \widehat{y}(k) = e(k)$. Aşadar, aceeaşi formulă ca şi mai sus se poate folosi pentru a calcula $\varepsilon(k)$:

$$\boxed{\varepsilon(k) = H^{-1}(q^{-1})(y(k) - G(q^{-1})u(k))}$$

Acesta este un sistem dinamic care poate fi simulat pentru a obţine semnalul $\varepsilon(k)$.

Predictor

Pentru a obţine eroarea $e(k)$, dinamica predictorului trebuie să fie:

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(k) &= y(k) - e(k) = Gu(k) + He(k) - e(k) = Gu(k) + (H-1)e(k) \\
&= Gu(k) + (H-1)H^{-1}(y(k) - Gu(k)) \\
&= Gu(k) + (1 - H^{-1})(y(k) - Gu(k)) \\
&= Gu(k) + (1 - H^{-1})y(k) - Gu(k) + H^{-1}Gu(k) \\
&= \boxed{(1 - H^{-1})y(k) + H^{-1}Gu(k)}
\end{aligned}$$

unde am omis argumentul q^{-1} pentru a menţine lizibilitatea ecuaţiilor.

Observaţie: Pentru a avea un predictor *cauzal*, care depinde doar de valorile anterioare ale ieşirii şi intrării, impunem $G(0) = 0$ şi $H(0) = 1$.

Căutarea parametrilor

Odată ce o procedură pentru calculul predicţiilor şi erorilor este disponibilă, parametrii θ sunt găsiţi prin minimizarea funcţiei obiectiv $V(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon^2(k)$.

Din nou, regresia liniară nu va funcţiona în general, şi vom prezenta metode de optimizare alternative ulterior.

Specializarea metodei la cazul ARX

Este util să vedem cum se simplifică formulele în cazul ARX.
Rescriem modelul ARX în forma generală:

$$y(k) = Gu(k) + He(k) = \frac{B}{A}u(k) + \frac{1}{A}e(k)$$

Avem:

$$\begin{aligned}
H^{-1} &= A \Rightarrow 1 - H^{-1} = 1 - A, \quad H^{-1}G = B \\
\widehat{y}(k) &= (1 - A)y(k) + Bu(k) \\
&= (-a_1 q^{-1} - \ldots - a_{na} q^{-na})y(k) + (b_1 q^{-1} + \ldots b_{nb} + q^{-nb})u(k) \\
&= \varphi(k)\theta \\
\varepsilon(k) &= H^{-1}(y(k) - Gu(k)) = Ay(k) - Bu(k) \\
&= y(k) - (1 - A)y(k) - Bu(k) = y(k) - \widehat{y}(k)
\end{aligned}$$

care este aşadar echivalent cu formularea ARX.

Specializarea metodei la ARMAX de ordinul 1

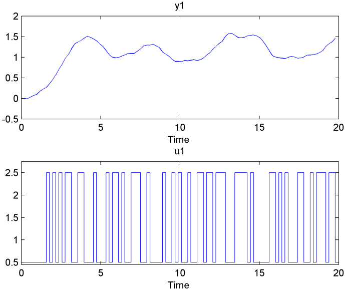
Exerciţiu

Înlocuiţi polinoamele din forma ARMAX de ordinul 1 în formulele generale, şi verificaţi că obţineţi aceleaşi dinamici (formule recursive) pentru predictor şi eroare ca şi mai sus.

Conţinut

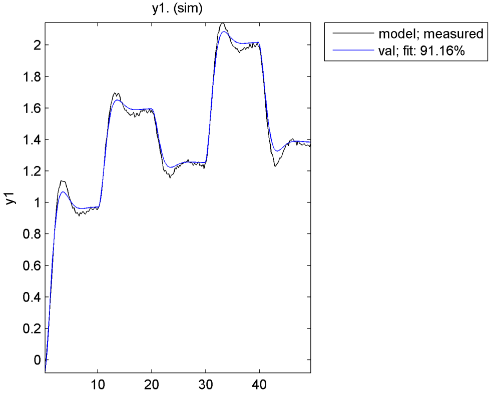
Date experimentale

Folosim din nou datele experimentale pe care am identificat modelul ARX mai demult. `plot(id);` şi `plot(val);`



Reamintim: rezultat ARX

Presupunând că sistemul este de ordinul 2 fără timp mort, alegem $na = 2, nb = 2, nk = 1$.



Rezultatele sunt destul de proaste.

Identificarea unui model ARMAX

```
mARMAX = armax(id, [na, nb, nc, nk]);
```

Argumente:

1. Setul de date de identificare.
2. Vector conţinând ordinele polinoamelor A, B, C şi *întârzierea* nk.

Ca şi pentru ARX, structura include explicit întârzierea minimă nk între intrări şi ieşiri.

$$\begin{aligned}
y(k) &+ a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_{na} y(k-na) \\
&= b_1 u(k-nk) + b_2 u(k-nk-1) + \ldots + b_{nb} u(k-nk-nb+1) \\
&+ e(k) + c_1 e(k-1) + c_2 e(k-2) + \ldots + c_{nc} e(k-nc)
\end{aligned}$$

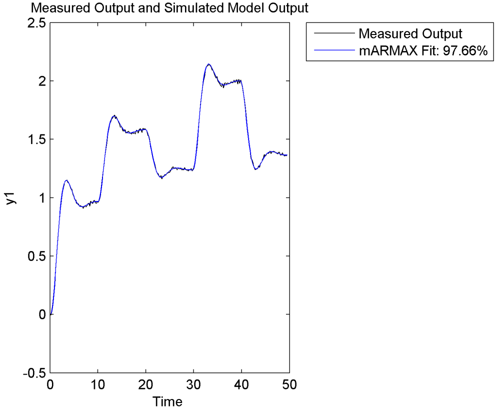
$$A(q^{-1}) y(k) = B(q^{-1}) u(k-nk) + C(q^{-1}) e(k), \text{ where:}$$

$$\begin{aligned}
A(q^{-1}) &= (1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_{na} q^{-na}) \\
B(q^{-1}) &= (b_1 + b_2 q^{-1} + b_{nb} q^{-nb+1}) \\
C(q^{-1}) &= (1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \ldots + c_{nc} q^{-nc})
\end{aligned}$$

Observaţie: Ca pentru ARX, structura teoretică se obţine alegând $nk = 1$ (şi pentru a reprezenta $nk > 1$ în structura teoretică, adăugăm coeficienţi iniţiali zero în B).

Model ARMAX

Considerând că sistemul este de ordinul 2 fără timp mort, alegem $na = nb = nc = 2$, $nk = 1$. Validare: `compare(val, mARMAX);`

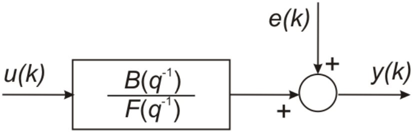


Spre deosebire de ARX, rezultatele sunt bune. Modelul mai flexibil al perturbaţiei îşi arată utilitatea.

Identificarea unui model OE

Reamintim structura OE:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(k) + e(k)$$



Identificarea unui model OE (continuare)

```
mOE = oe(id, [nb, nf, nk]);
```

Argumente:

1. Setul de date de identificare.
2. Vector conţinând ordinele polinoamelor B, F, şi întârzierea nk.

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(k - nk) + e(k), \text{ where:}$$
$$B(q^{-1}) = (b_1 + b_2 q^{-1} + b_{nb} q^{-nb+1})$$
$$F(q^{-1}) = (1 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2} + \ldots + f_{nf} q^{-nf})$$

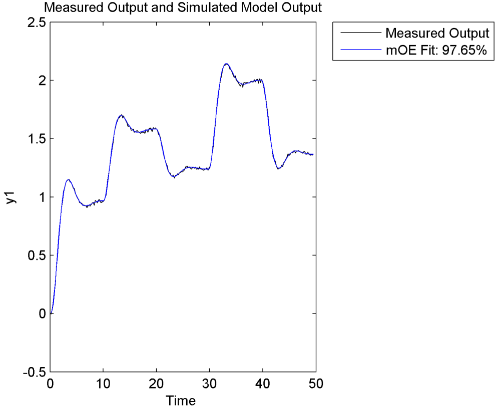
Formula explicită:

$$\begin{aligned} y(k) + f_1 y(k-1) + f_2 y(k-2) + \ldots + f_{nf} y(k-nf) \\ = b_1 u(k-nk) + b_2 u(k-nk-1) + \ldots + b_{nb} u(k-nk-nb+1) \\ + e(k) + f_1 e(k-1) + f_2 e(k-2) + \ldots + f_{nf} e(k-nf) \end{aligned}$$

Observaţie: Ca şi înainte, structura teoretică se obţine alegând $nk = 1$ (sau schimbând B dacă $nk > 1$).

Model OE

Considerând că sistemul este de ordinul 2 fără timp mort, alegem $nb = 2, nf = 2, nk = 1$. Validare: `compare(val, mOE);`



Rezultatele sunt la fel de bune ca şi ARMAX. Sistemul satisface deci ambele structuri de model. Întrebare: Care este structura reală?

Conţinut

Derivata şi Hessianul unui vector

Considerăm *orice funcţie* $V(\theta)$, $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Avem:

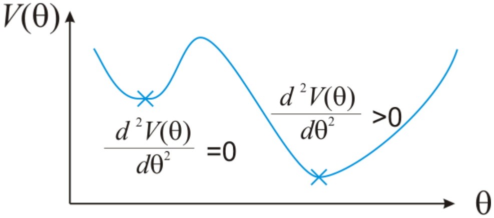
$$\frac{dV}{d\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{d^2 V}{d\theta^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \theta_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_n \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_n \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_n^2} \end{bmatrix}$$

Ipoteze

Ipoteze (simplificate)

1. Semnalele $u(k)$ şi $y(k)$ sunt procese stohastice staţionare.
2. Semnalul de intrare $u(k)$ are un ordin de PE suficient de mare.
3. Hessianul $\frac{d^2 V}{d\theta^2}$ este inversabil în punctele de minim ale funcţiei MSE V.

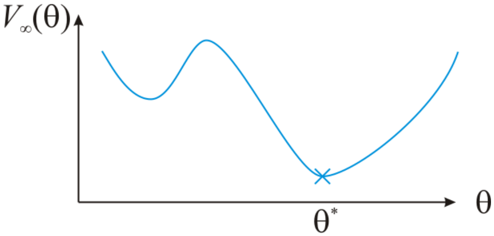
Reamintim funcţia de MSE $V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^2(k)$. Ipoteza 3 garantează că V nu este "plat" în jurul minimelor.



Garanţie

Teorema 1

Definim limita $V_\infty(\theta) = \lim_{N\to\infty} V(\theta)$. Date fiind Ipotezele 1–3, soluţia de identificare $\widehat{\theta} = \arg\min_\theta V(\theta)$ converge la un punct de minim θ^* al $V_\infty(\theta)$ când numărul de date $N \to \infty$.



Observaţie: Rezultatul este unul de consistenţă, în limita unui număr infinit de date.

Ipoteze adiţionale

Ipoteze (simplificate)

4. Sistemul adevărat satisface structura de model aleasă. Anume, există cel puţin un vector corect θ_0 astfel încât pentru orice intrare $u(k)$ şi ieşirea corespunzătoare $y(k)$ a sistemului adevărat, avem:

$$y(k) = G(q^{-1}; \theta_0)u(k) + H(q^{-1}; \theta_0)e(k)$$

   unde $e(k)$ este *zgomot alb*.
5. Intrarea $u(k)$ este independentă de zgomotul $e(k)$ (experimentul este efectuat în buclă deschisă).

Garanţie adiţională

Teorema 2

Date fiind Ipotezele 1-5, $\widehat{\theta}$ converge la vectorul corect de parametri θ_0 când $N \to \infty$.

Observaţie: Şi această garanţie este una de consistenţă. Pe când Teorema 1 garantează o soluţie de eroare minimă, Teorema 2 ne spune că această soluţie corespunde sistemului adevărat, *în condiţiile în care* sistemul satisface structura aleasă pentru model.

Conţinut

Problema de optimizare

Obiectivul procedurii de identificare: Minimizarea erorii medii pătratice

$$V(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(k)^2$$

unde $\varepsilon(k)$ sunt erorile de predicţie. În cazul general:

$$\varepsilon(k) = H^{-1}(q^{-1})(y(k) - G(q^{-1})u(k))$$

Soluţia: $\widehat{\theta} = \arg\min_{\theta} V(\theta)$

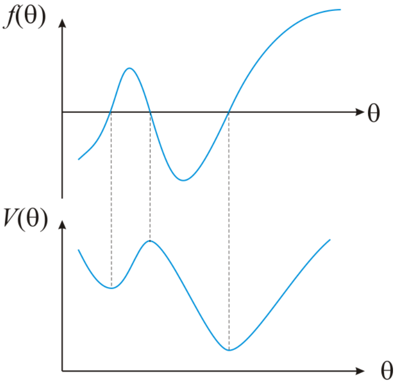
Până acum am presupus că această soluţie a fost deja obţinută, şi i-am investigat proprietăţile. Pe când în ARX puteam obţine soluţia folosind regresia liniară, în general această metodă nu va funcţiona. Principala problemă care apare în implementare este:

Cum se rezolvă problema de optimizare?

Minimizare folosind zeroul derivatei

Considerăm întâi cazul scalar, $\theta \in \mathbb{R}$.

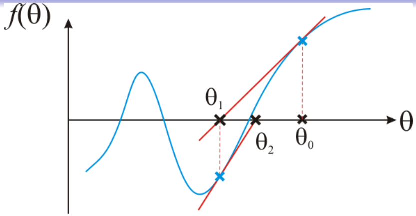
Idee: în orice minim, derivata $f(\theta) = \frac{dV}{d\theta}$ este zero. Aşadar, căutăm un zero al funcţiei $f(\theta)$.



Observaţii:

- Trebuie avut grijă ca metoda să găsească un minim şi nu un maxim sau punct de inflexiune. Acest lucru se poate verifica folosind derivata a doua, $\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{df}{d\theta} > 0$.
- Este posibil ca metoda să găsească şi un punct de minim local, în care funcţia are valoare mai mare decât în minimul global.

Metoda lui Newton pentru rezolvarea ecuaţiei $f(\theta) = 0$



- Pornim dintr-un punct iniţial θ_0.
- La iteraţia ℓ, următorul punct $\theta_{\ell+1}$ este intersecţia între abscisă şi tangenta la f în punctul curent θ_ℓ. Geometric:

$$\boxed{\theta_{\ell+1} = \theta_\ell - \frac{f(\theta_\ell)}{\frac{df(\theta_\ell)}{d\theta}}}$$

Observaţii:

- Notaţia $\frac{df(\theta_\ell)}{d\theta}$ înseamnă valoarea derivatei $\frac{df}{d\theta}$ în punctul θ_ℓ.
- Panta tangentei este $\frac{df(\theta_\ell)}{d\theta}$.
- $\theta_{\ell+1}$ este cea mai bună estimare a soluţiei dată fiind informaţia din punctul curent θ_ℓ.

Metoda lui Newton pentru problema de optimizare

- Înlocuim $f(\theta)$ cu $\frac{dV}{d\theta}$ pentru a ne întoarce la problema de optimizare:

$$\theta_{\ell+1} = \theta_\ell - \frac{\frac{dV(\theta_\ell)}{d\theta}}{\frac{d^2V(\theta_\ell)}{d\theta^2}}$$

- Extindem la $\theta \in \mathbb{R}^n$. Acum, $\frac{dV}{d\theta}$ este un vector de n elemente, şi Hessianul $\frac{d^2V}{d\theta^2}$ o matrice $n \times n$. Forma extinsă corectă:

$$\theta_{\ell+1} = \theta_\ell - \left[\frac{d^2V(\theta_\ell)}{d\theta^2}\right]^{-1} \frac{dV(\theta_\ell)}{d\theta}$$

- Adăugăm un pas $\alpha_\ell > 0$. Forma finală:

$$\boxed{\theta_{\ell+1} = \theta_\ell - \alpha_\ell \left[\frac{d^2V(\theta_\ell)}{d\theta^2}\right]^{-1} \frac{dV(\theta_\ell)}{d\theta}}$$

Observaţie: Pasul ajută la convergenţa metodei, de ex. când funcţia V este afectată de zgomot.

Criteriu de oprire

Algoritmul poate fi oprit:

- Când diferenţa între doi vectori consecutivi de parametri este mică, de ex. $\max_{i=1}^{n} |\theta_{i,\ell+1} - \theta_{i,\ell}|$ este mai mic decât un prag prestabilit.

sau

- Când numărul de iteraţii ℓ depăşeşte un maxim prestabilit.

Calculul derivatelor

$$V(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(k)^2$$

Ţinânt cont că $\varepsilon(k)$ depinde de θ, avem:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(k)\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}\left[\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}\right]^\top + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(k)\frac{d^2\varepsilon(k)}{d\theta^2}$$

unde:

- $\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}$ este derivata vectorială şi $\frac{d^2\varepsilon(k)}{d\theta^2}$ este Hessianul lui $\varepsilon(k)$.
- $\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}[\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}]^\top$ este o matrice $n \times n$.

Gauss-Newton

Ignorăm cel de-al doilea termen în Hessianul lui V şi îl folosim doar pe primul:

$$\mathcal{H} = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}\left[\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}\right]^\top$$

Obţinem metoda Gauss-Newton:

$$\theta_{\ell+1} = \theta_\ell - \alpha_\ell \mathcal{H}^{-1}\frac{dV(\theta_\ell)}{d\theta}$$

Motivare:

- Forma pătratică a lui $\mathcal{H}$ duce la un comportament mai bun al algoritmului.
- Calculele sunt mai simple.

Calculul detaliat al derivatei $\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}$ depinde de structura aleasă pentru modelul.

Exemplu: ARMAX de ordinul 1

Reamintim modelul ARMAX de ordinul 1 şi eroarea sa de predicţie:

$$y(k) = -ay(k-1) + bu(k-1) + ce(k-1) + e(k)$$
$$\varepsilon(k) = -c\varepsilon(k-1) + y(k) + ay(k-1) - bu(k-1)$$

Avem nevoie de $\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta} = [\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial a}, \frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial b}, \frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial c}]^\top$. Derivând a doua ecuaţie:

$$\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial a} = -c\frac{\partial\varepsilon(k-1)}{\partial a} + y(k-1)$$
$$\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial b} = -c\frac{\partial\varepsilon(k-1)}{\partial b} - u(k-1)$$
$$\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial c} = -c\frac{\partial\varepsilon(k-1)}{\partial c} - \varepsilon(k-1)$$

$\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial a}, \frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial b}, \frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial c}$ sunt semnale dinamice! Ele pot fi calculate folosind formulele recursive de mai sus, pornind de ex. de la valori iniţiale 0.

Exemplu: ARMAX de ordinul 1 (continuare)

În final, algoritmul complet poate fi implementat după cum urmează:

iniţializează θ_0, indexul de iteraţie $\ell = 0$
repeat
    dat fiind vectorul curent de parametri θ_ℓ,
        calculează cu formulele recursive $\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}$, $k = 1, \ldots, n$
    înlocuieşte $\frac{d\varepsilon(k)}{d\theta}$ în formulele $\frac{dV}{d\theta}$, $\frac{d^2V}{d\theta^2}$
    găseşte $\theta_{\ell+1}$ cu actualizarea Newton (sau Gauss-Newton)
    incrementează indexul: $\ell = \ell + 1$
until $\theta_{\ell+1} - \theta_\ell$ este destul de mic, sau numărul maxim de iteraţii este atins