Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu

Partea III

Baze matematice: Regresie liniară şi statistică

Motivare

Până acum, am discutat analiza în domeniul timp a răspunsurilor la treaptă, folosind concepte cunoscute din teoria sistemelor liniare.

Majoritatea metodelor de identificare care urmează necesită elemente noi: regresia liniară şi concepte de teoria probabilităţilor şi statistică. Le vom discuta aici.

În această parte anumite notaţii (de ex. x, A) au o semnificaţie diferită de cea din restul materialului de curs.

Conţinut

Conţinut

Problema de regresie

Elementele problemei:

- Un şir de eşantioane cunoscute $y(k) \in \mathbb{R}$, indexate de $k = 1, \dots, N$: y este *variabila dependentă* (măsurătoarea).
- Pentru fiecare k, un vector cunoscut $\varphi(k) \in \mathbb{R}^n$: conţine *regresorii* $\varphi_i(k)$, $i = 1, \dots, n$, $\varphi(k) = [\varphi_1(k), \varphi_2(k) \dots, \varphi_n(k)]^\top$.
- Un *vector de parametri* $\theta \in \mathbb{R}^n$ necunoscut.

Obiectiv: identificarea comportamentului variabilei dependente din date, folosind modelul liniar:

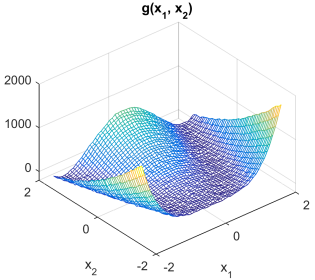
$$\boxed{y(k) = \varphi^\top(k)\theta}$$

Regresia liniară este o metodă clasică şi des folosită, de ex. Gauss a folosit-o pentru a calcula orbitele planetelor în 1809.

Problema de regresie: Două utilizări importante

1. k este o variabilă de timp, şi modelăm seria temporală $y(k)$.
2. k este doar un index de eşantion, şi $\varphi(k) = \phi(x(k))$ unde x este intrarea unei funcţii necunoscute g. În acest caz $y(k)$ este ieşirea corespunzătoare, posibil afectată de zgomot, iar obiectivul este identificarea unui model al funcţiei g din date. Această problemă se numeşte şi *aproximarea unei funcţii*, sau *învăţarea supervizată*.

$g(x)$ necunoscut



$\widehat{g}(x)$

?

Aproximare: Funcţii de bază

Pentru aproximarea unei funcţii, regresorii $\phi_i(k)$ din:

$$\phi(x(k)) = [\phi_1(x(k)), \phi_2(x(k)), \ldots, \phi_n(x(k))]^\top$$

se numesc *funcţii de bază*.

Aproximare: Exemplul 1

Studiem venitul anual y (în EUR) al unei persoane bazat pe nivelul de educaţie x_1 şi experienţa profesională x_2 (ambele măsurate în ani).

Se dă un set de date $(x_1(k), x_2(k), y(k))$ de la un grup reprezentativ de persoane. Obiectivul este predicţia venitului oricărei alte persoane din nivelul său de educaţie (x_1) şi experienţă (x_2).

- Alegem funcţiile de bază $\phi(x) = [x_1, x_2, 1]^\top$. Ne aşteptăm ca venitul să evolueze conform cu $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 = \phi^\top(x)\theta$, crescând liniar cu educaţia and experienţa (de la un nivel minimal). Regresia implică găsirea parametrilor θ pentru care expresia este cel mai aproape de valorile reale ale venitului.
- În realitate, lucrurile sunt mai complicate... vom avea nevoie de variabile de intrare suplimentare, funcţii de bază mai bune, etc.

Aproximare: Exemplul 2

Studiem timpul de reacţie y (în ms) al unui şofer în funcţie de vârsta sa x_1 (în ani) şi oboseala x_2 (de ex. pe o scară de la 0 la 1).

Se dă un set de date $(x_1(k), x_2(k), y(k))$ de la un grup reprezentativ de şoferi de diferite vârste şi nivele de oboseală. Obiectivul este predicţia timpului de reacţie al oricărui alt şofer folosind vârsta (x_1) şi oboseala (x_2) sa.

Exemplu regresori 1: Polinom în k

Util pentru modelarea seriilor temporale.

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \theta_1 + \theta_2 k + \theta_3 k^2 + \ldots + \theta_n k^{n-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 & \ldots & k^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \ldots \\ \theta_n \end{bmatrix} \\
&= \varphi^\top(k)\theta
\end{aligned}
$$

Exemplu regresori 2: Polinom în x

Util pentru aproximarea funcţiilor. De exemplu, polinomul de gradul 2 cu două variabile de intrare $x = [x_1, x_2]^\top$ este:

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \theta_1 + \theta_2 x_1(k) + \theta_3 x_2(k) + \theta_4 x_1^2(k) + \theta_5 x_2^2(k) + \theta_6 x_1(k) x_2(k) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x_1(k) & x_2(k) & x_1^2(k) & x_2^2(k) & x_1(k)x_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} \\
&= \phi^\top(x(k))\theta = \varphi^\top(k)\theta
\end{aligned}
$$

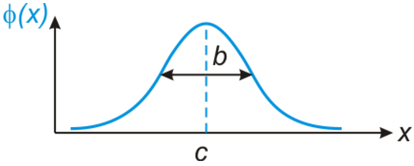
Conexiune: Proiect partea 1

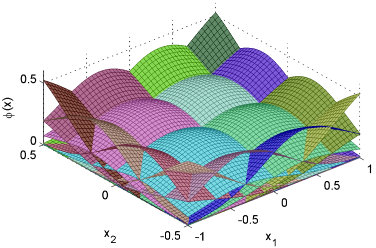
Exemplu regresori 3: Funcţii de bază Gaussiene

Utile pentru aproximarea funcţiilor:

$$\phi_i(x) = \exp\left[-\frac{(x-c_i)^2}{b_i^2}\right] \qquad \text{(1-dim);}$$

$$= \exp\left[-\sum_{j=1}^{d}\frac{(x_j-c_j)^2}{b_j^2}\right] \qquad \text{(d-dim)}$$

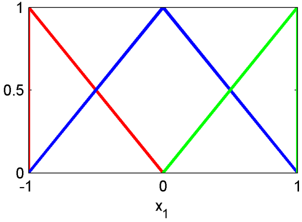


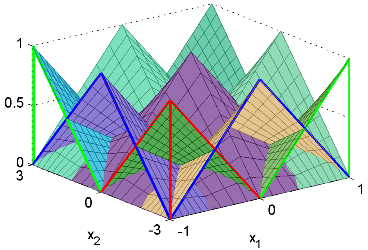


Exemplu regresori 4: Interpolare

Utilă pentru aproximarea funcţiilor.

- Grilă *d*-dimensională de puncte în spaţiul intrărilor.
- Interpolare (multi)-liniară între aceste puncte.
- Echivalent cu funcţii de bază *piramidale* (triunghiulare într-o singură dimensiune)





Sistem liniar

Scriind modelul pentru fiecare din cele N date, obţinem un sistem de ecuaţii liniare:

$$\begin{aligned}
y(1) &= \varphi_1(1)\theta_1 + \varphi_2(1)\theta_2 + \ldots \varphi_n(1)\theta_n \\
y(2) &= \varphi_1(2)\theta_1 + \varphi_2(2)\theta_2 + \ldots \varphi_n(2)\theta_n \\
&\ldots \\
y(N) &= \varphi_1(N)\theta_1 + \varphi_2(N)\theta_2 + \ldots \varphi_n(N)\theta_n
\end{aligned}$$

Reamintim că în aproximarea funcţiilor, $\varphi_i(k) = \phi_i(x(k))$

Sistemul se poate scrie în *formă matriceală*:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \ldots & \varphi_n(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \ldots & \varphi_n(2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \ldots & \varphi_n(N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \ldots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Y = \Phi\theta}$$

cu noile variabile $Y \in \mathbb{R}^N$ şi $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times n}$.

Problema celor mai mici pătrate (CMMP)

Dacă $N = n$, sistemul se poate rezolva cu egalitate.

În practică, este mai bine să folosim $N > n$, de ex. datorită zgomotului. În acest caz, sistemul nu mai poate fi rezolvat cu egalitate, ci doar cu aproximare.

- *Eroarea* la k: $\varepsilon(k) = y(k) - \varphi^\top(k)\theta$,
  vectorul de eroare $\varepsilon = [\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(N)]^\top$.
- Funcţia obiectiv ce trebuie minimizată:

$$V(\theta) = \boxed{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k)^2} = \frac{1}{2}\varepsilon^\top \varepsilon$$

Problema CMMP

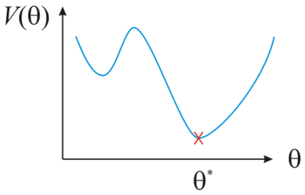
Găseşte vectorul de parametri $\widehat{\theta}$ care minimizează funcţia obiectiv:

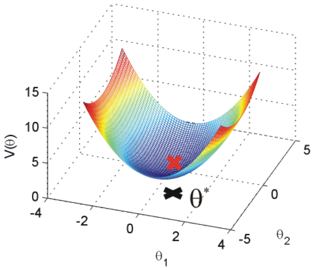
$$\widehat{\theta} = \arg\min_{\theta} V(\theta)$$

Paranteză: Problema de optimizare

Dată fiind o funcţie V de variabilele θ, care poate fi de ex. obiectivul nostru CMMP, sau în general oricare altă funcţie:

găseşte *valoarea optimă a funcţiei* $\min_\theta V(\theta)$ şi valorile $\theta^* = \arg\min_\theta V(\theta)$ ale variabilelor pentru care minimul este atins





De notat că în cazul regresiei liniare, folosim notaţia $\widehat{\theta}$; vectorul $\widehat{\theta}$ este soluţia reală a problemei de optimizare dat fiind setul de date, dar rămâne totuşi o estimare datorită zgomotului din date

Soluţia formală a problemei de regresie

După câţiva paşi de algebră liniară:

$$\boxed{\widehat{\theta} = (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top Y}$$

Observaţii:

- Valoarea optimă a funcţiei obiectiv este $V(\widehat{\theta}) = \frac{1}{2}[Y^\top Y - Y^\top \Phi(\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top Y]$.
- Matricea $\Phi^\top \Phi$ trebuie sa fie inversabilă, ceea ce necesită o alegere bună a modelului (ordin n, regresori φ), şi folosirea unui set informativ de date.

Expresie alternativă

$$\Phi^\top \Phi = \sum_{k=1}^{N} \varphi(k)\varphi^\top(k), \Phi^\top Y = \sum_{k=1}^{N} \varphi(k) y(k)$$

Soluţia poate fi scrisă:

$$\widehat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^{N} \varphi(k)\varphi^\top(k)\right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{N} \varphi(k) y(k)\right]$$

Avantaj: matricea Φ cu dimensiunile $N \times n$ nu mai trebuie calculată; este nevoie doar de matrici şi vectori mai mici, de dimensiuni $n \times n$ respectiv n.

Rezvolarea sistemului liniar

În practică, ambele metode bazate pe inversarea de matrici se comportă prost din punct de vedere numeric. Există algoritmi mai buni, cum ar fi triangularizarea ortogonală.

În majoritatea cazurilor, MATLAB alege automat un algoritm potrivit. Dacă Φ este stocată în variabila `PHI` şi Y în `Y`, comanda care rezolvă sistemul de ecuaţii în sensul CMMP este împărţirea matriceală la stânga (backslash):

```
theta = PHI \ Y;
```

Dacă se doreşte un control mai detaliat al algoritmului, se poate folosi funcţia `linsolve` în loc de \.

Conţinut

Exemplu analitic: Estimarea unui scalar

Model:

$$y(k) = b = 1 \cdot b = \varphi(k)\theta$$

unde $\varphi(k) = 1 \forall k$, $\theta = b$.

Pentru N date:

$$y(1) = \varphi(1)\theta = 1 \cdot b$$
$$\dots$$
$$y(N) = \varphi(N)\theta = 1 \cdot b$$

În formă matriceală:

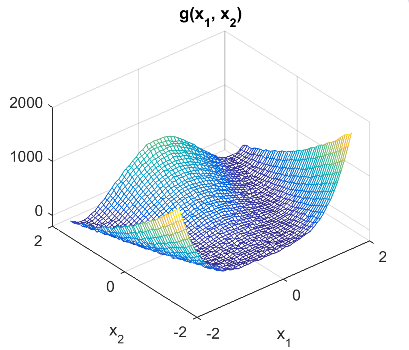
$$\begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \theta$$
$$Y = \Phi\theta$$

Exemplu analitic: Estimarea unui scalar (continuare)

$$
\begin{aligned}
\widehat{\theta} &= (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top Y \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \\
&= N^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{N} (y(1) + \ldots + y(N))
\end{aligned}
$$

Intuiţie: Estimarea este media tuturor măsurătorilor, filtrând zgomotul.

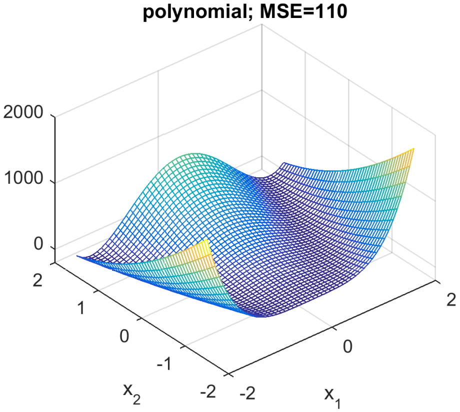
Exemplu: Aproximarea funcţiei lui Rosenbrock



- Funcţia Rosenbrock: $g(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100[(x_2 + 1.5) - x_1^2]^2$ (necunoscută de algoritm).
- Date de identificare: 200 puncte de intrare (x_1, x_2), distribuite aleator în spaţiul $[-2, 2] \times [-2, 2]$; şi ieşirile corespunzătoare $y = g(x_1, x_2)$, afectate de zgomot.
- Date de validare: grilă uniformă cu 31×31 puncte în $[-2, 2] \times [-2, 2]$ cu ieşirile corespunzătoare (afectate de zgomot).

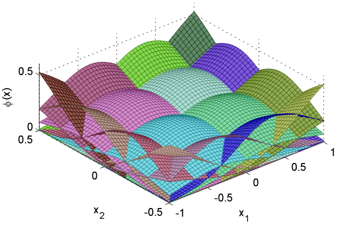
Funcţia Rosenbrock: Aproximare polinomială

Polinom de gradul 4 în cele două intrări (15 parametri):

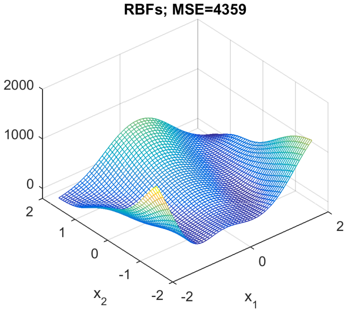


Funcţia Rosenbrock: Funcţii de bază radiale

Reamintim funcţiile de bază radiale:

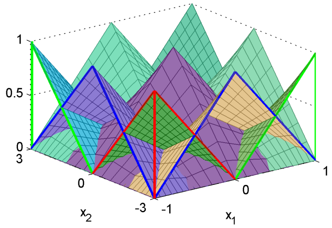


Rezultate cu 6 $\times$ 6 RBF-uri, cu centrele pe o grilă echidistantă şi lăţimea egală cu distanţa între centre:

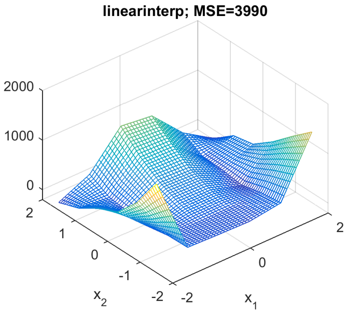


Funcţia Rosenbrock: Interpolare

Reamintim funcţiile de bază piramidale, pentru interpolare:



Rezultate cu grilă de interpolare 6×6 (corespunzând la 6×6 funcţii de bază):



Conţinut

Probabilitate: Definiţie formală

Concepte preliminare:

- *Rezultat* ω, luând valori în *universul* Ω, $\omega \in \Omega$
- *Eveniment* A, definit ca un subset al Ω, $A \subseteq \Omega$ (cu anumite condiţii tehnice de validitate)

Definiţie

O măsură de probabilitate P este o funcţie ce se aplică evenimentelor posibile şi produce probabilităţi în $[0, 1]$, cu satisfacerea condiţiilor:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ (probabilităţi valide)
2. $P(\Omega) = 1$ (universul complet trebuie să aibă probabilitatea 1)
3. Dacă evenimentele $A_1, \ldots, A_m$ sunt disjuncte, atunci $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m)$. Această condiţie este necesară chiar dacă $m \to \infty$.

În această secţiune urmărim Capitolul 5 al suportului de curs pentru identificarea sistemelor de la Uppsala University, dezvoltate de K. Pelckmans.

Probabilitate: Exemplu

Considerăm precipitaţia într-o anumită zi, notată cu h şi măsurată în mm.

- *Univers*: de ex. $\Omega = \{\text{senin } (h = 0), \text{burniţă } (0 < h \leq 2), \text{ploaie } (2 < h \leq 10), \text{furtună } (h > 10)\}$, cu *rezultatele* ω putând lua oricare dintre aceste valori.
- *Eveniment A*: orice rezultat individual, de ex. $A = \{\text{burniţă}\}$, şi în plus orice reuniune de rezultate, cum ar fi $A = \{\text{burniţă}\} \cup \{\text{ploaie}\} \cup \{\text{furtună}\}$; cu numele posibil $A = \text{umed}$.

Un exemplu de *măsură de probabilitate* este $P(\{\text{senin}\}) = 0.5$, $P(\{\text{burniţă}\}) = 0.2$, $P(\{\text{ploaie}\}) = 0.2$, $P(\{\text{furtună}\}) = 0.1$, şi folosim condiţia 3 pentru a genera evenimente combinate, de ex. $P(\text{umed}) = 0.2 + 0.2 + 0.1 = 0.5$. De notat că ambele condiţii, 1 şi 2, sunt satisfăcute.

Probabilitate: Independenţă

Probabilitatea comună a două evenimente A şi B este $P(A, B) := P(A \cap B)$.

Definiţie

Două evenimente A şi B se numesc independente dacă $P(A, B) = P(A)P(B)$.

Exemple:

- Evenimentul de a arunca 6 cu un zar este independent de evenimentul 6 la aruncarea anterioară (de fapt, de oricare altă valoare la orice aruncare anterioară).
- Evenimentul de a arunca două valori 6 *consecutive* nu este independent de aruncarea anterioară!

(Primul fapt este contra-intuitiv şi multă lume nu îl înţelege, ducând la aşa-numita *gambler's fallacy*. O secvenţă mai lungă de jocuri norocoase sau proaste nu are nici absolut nici o influenţă asupra jocului următor!)

Variabilă aleatoare

Definiţie

O variabilă aleatoare este o funcţie $X : \Omega \to \mathcal{X}$ definită pe universul Ω, şi care ia valori într-un spaţiu arbitrar $\mathcal{X}$.

Intuitiv, variabilele aleatoare asociază valori interesante rezultatelor ω. O valoare specifică (deterministă) a variabilei X este notată cu x. O astfel de valoare se numeşte *realizare* a X.

Probabilitatea cu care X ia valoarea x este probabilitatea tuturor rezultatelor asociate cu valoarea x:

$$P(X = x) = P(\{\omega \mid X(\omega) = x\})$$

Vom folosi prima notaţie, mai simplă.

Variabilă aleatoare: Exemplu

O urnă conţine 10 bile colorate, numerotate de la 1 la 10. Primele 2 bile sunt able, celelalte sunt negre. Universul este $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$. Bilele sunt extrase urmărind o distribuţie uniformă, corespunzând la $P(\{i\}) = 1/10, \ \forall i$.

- *Variabila aleatoare* este culoarea bilei, $X : \Omega \rightarrow \{\text{alb}, \text{negru}\}$, definită prin $X(1) = X(2) = \text{alb}$, $X(3) = \cdots = X(10) = \text{negru}$.
- Probabilitatea de a extrage o bilă albă este $P(X = \text{alb}) = P(\{1, 2\}) = 1/5$.

Variabilă aleatoare discretă

Dacă setul $\mathcal{X}$ este discret, variabila aleatoare este şi ea discretă. Există două posibilităţi:

- $\mathcal{X}$ conţine un număr finit n de elemente
- $\mathcal{X}$ conţine un număr infinit de elemente ce pot fi indexate folosind numerele naturale $0, 1, 2, \ldots$ (concept matematic: "numărabil").

În acest caz, o reprezentare suficientă a distribuţiei de probabilitate este funcţia de frecvenţă:

Definiţie

Funcţia de frecvenţă a variabilei X este lista probabilităţilor tuturor valorilor individuale $p(x_0), p(x_1), \ldots$.

Exemplu: Culoarea bilei este o variabilă aleatoare discretă, cu număr finit de valori (două), şi funcţia sa de frecvenţă este $p(\text{alb}) = 1/5$, $p(\text{negru}) = 4/5$.

Variabilă aleatoare continuă: Motivare

În exemplul legat de vreme, dorim să caracterizăm cantitatea precisă de precipitaţii $h \in [0, h_{\max}]$ unde $h_{\max}$ este un maxim rezonabil. Presupunem că toate valorile h au probabilităţi egale. (Putem lua universul $\Omega = [0, h_{\max}]$ şi variabila H egală cu funcţia identitate, $H(\omega) = \omega$).

Dar există o infinitate continuă de valori în intervalul $[0, h_{\max}]$, aşadar $P(h)$ trebuie să fie 0 pentru orice h! (Altfel, cum probabilităţile sunt egale, $P([0, h_{\max}]) \to \infty$ şi condiţia 1 din definiţia probabilităţii este invalidată.) Aşadar, nu se poate defini o funcţie de frecvenţă care să aibă sens.

Variabilă aleatoare continuă: Repartiţie şi densitate

Se pot defini probabilităţi utile doar pentru subseturi "continue".

Definiţii

Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare continue $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este:

$$F(x) := P(X \leq x) = P(\{\omega \mid X(\omega) \leq x\})$$

Din funcţia de repartiţie, definim densitatea de probabilitate:

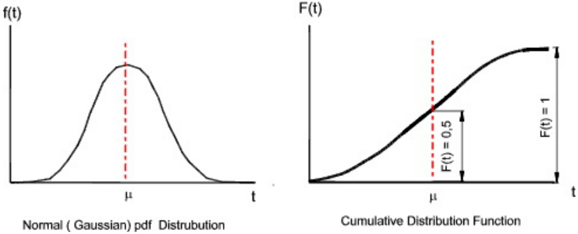
$$f(x) := \frac{dF(x)}{dx}$$

Observaţii:

- Densitatea corespunde funcţiei de frecvenţă discrete.
- Pentru orice set $Z \subseteq \mathcal{X}$, $P(X \in Z) = \int_{x \in Z} f(x)$ (în cazul discret, $P(X \in Z) = \sum_{x \in Z} P(x)$).

Exemplu: Distribuţia Gaussiană

Are formă similară cu funcţiile de bază Gaussiene, dar semnificaţie diferită.



$$f_{\mathrm{G}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Parametri: media μ şi varianţa σ^2 (vor fi explicaţi mai târziu)

Distribuţia Gaussiană intervine adeseori în natură: de ex., distribuţia IQ-urilor într-o populaţie umană. Este numită de aceea şi distribuţia normală, şi se notează $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Conţinut

Probabilităţi în practică

În inginerie, se folosesc de obicei variabile aleatoare *numerice* şi se lucrează direct cu funcţiile de frecvenţă $p(x)$ sau de densitate $f(x)$.

Universul Ω, rezultatele ω, şi evenimentele A sunt rareori definite sau folosite explicit.

Valoarea medie

Definiţie

$$\mathrm{E}\left\{X\right\} = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x)x & \text{pentru variabile aleatoare discrete} \\ \int_{x \in \mathcal{X}} f(x)x & \text{pentru variabile aleatoare continue} \end{cases}$$

Intuiţie: media tuturor valorilor, ponderate de probabilitatea lor; valoarea "aşteptată" în avans, dată fiind distribuţia de probabilitate.

Valoarea medie se mai numeşte şi *valoare aşteptată* sau *speranţă*.

Exemple:

- Pentru un zar unde X este numărul fiecărei feţe, $\mathrm{E}\left\{X\right\} = \frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}2 + \ldots + \frac{1}{6}6 = 7/2$.
- Dacă X are distribuţie Gaussiană, $f(x) = f_{\mathrm{G}}(x)$, atunci $\mathrm{E}\left\{X\right\} = \mu$.

Valoarea medie a unei funcţii

Considerăm o funcţie $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ care depinde de variabila aleatoare X. Atunci, $g(X)$ este o şi ea o variabilă aleatoare, cu valoarea medie:

$$\mathrm{E}\left\{g(X)\right\} = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) g(x) & \text{discret} \\ \int_{x \in \mathcal{X}} f(x) g(x) & \text{continuu} \end{cases}$$

Varianţa

Definiţie

$$\mathrm{Var}\left\{X\right\} = \boxed{\mathrm{E}\left\{(X - \mathrm{E}\left\{X\right\})^2\right\}} = \mathrm{E}\left\{X^2\right\} - (\mathrm{E}\left\{X\right\})^2$$

Intuiţie: cât de "răspândite" sunt valorile aleatoare în jurul valorii medii.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left\{X\right\} &= \begin{cases} \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)(x - \mathrm{E}\left\{X\right\})^2 & \text{discret} \\ \int_{x\in\mathcal{X}} f(x)(x - \mathrm{E}\left\{X\right\})^2 & \text{continuu} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)x^2 - (\mathrm{E}\left\{X\right\})^2 & \text{discret} \\ \int_{x\in\mathcal{X}} f(x)x^2 - (\mathrm{E}\left\{X\right\})^2 & \text{continuu} \end{cases}\end{aligned}$$

Exemple:

- Pentru un zar, $\mathrm{Var}\left\{X\right\} = \frac{1}{6}1^2 + \frac{1}{6}2^2 + \ldots + \frac{1}{6}6^2 - (7/2)^2 = 35/12$.
- Dacă X este distribuită cu densitatea $f(x) = f_{\mathrm{G}}(x)$, Gaussiană, atunci $\mathrm{Var}\left\{X\right\} = \sigma^2$.

Notaţie

Vom nota generic $\mathrm{E}\{X\} = \mu$ şi $\mathrm{Var}\{X\} = \sigma^2$.

Cantitatea $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}\{X\}}$ se numeşte *abaterea standard*.

Covarianţă

Definiţie

$$\mathrm{Cov}\{X, Y\} = \boxed{\mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}\{X\})(Y - \mathrm{E}\{Y\})\}} = \mathrm{E}\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}$$

unde μ_X, μ_Y sunt valorile medii ale celor două variabile.

Intuiţie: cât de “aliniate” sunt schimbările celor două variabile (covarianţă pozitivă dacă variabilele se schimbă în direcţii similare, negativă dacă se schimbă în direcţii opuse).

Observaţie: $\mathrm{Var}\{X\} = \mathrm{Cov}\{X, X\}$.

Variabile necorelate

Definiţie

Variabilele aleatoare X şi Y sunt necorelate dacă $\mathrm{Cov}\left\{X, Y\right\} = 0$. Altfel, ele se numesc corelate.

Exemple:

- Nivelul de educaţie al unei persoane este corelat cu venitul său.
- Culoarea părului este necorelată cu venitul (sau ar trebui să fie, în cazul ideal).

Observaţii:

- Dacă X şi Y sunt independente, atunci sunt şi necorelate.
- Dar nu şi invers! Putem avea variabile necorelate care sunt totuşi dependente.

Vectori de variabile aleatoare

Considerăm vectorul $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_N]^\top$ unde fiecare X_i este o variabilă aleatoare cu valori reale continue. Acest vector are o *funcţie de densitate comună* $f(\boldsymbol{x})$, cu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$.

Definiţii

Valoarea medie şi *matricea de covarianţă* a lui $\boldsymbol{X}$:

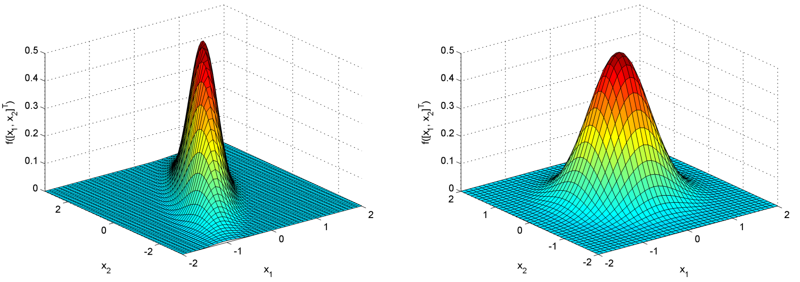
$$\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{X}\right\} := \left[\mathrm{E}\left\{X_1\right\}, \ldots, \mathrm{E}\left\{X_N\right\}\right]^\top = [\mu_1, \ldots, \mu_N]^\top, \text{ notată } \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{X}\right\} := \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}\left\{X_1, X_1\right\} & \mathrm{Cov}\left\{X_1, X_2\right\} & \cdots & \mathrm{Cov}\left\{X_1, X_N\right\} \\ \mathrm{Cov}\left\{X_2, X_1\right\} & \mathrm{Cov}\left\{X_2, X_2\right\} & \cdots & \mathrm{Cov}\left\{X_2, X_N\right\} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{Cov}\left\{X_N, X_1\right\} & \mathrm{Cov}\left\{X_N, X_2\right\} & \cdots & \mathrm{Cov}\left\{X_N, X_N\right\} \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{E}\left\{(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top\right\}, \text{ notată } \Sigma \in \mathbb{R}^{N,N}$$

Observaţii: $\mathrm{Cov}\left\{X_i, X_i\right\} = \mathrm{Var}\left\{X_i\right\}$. De asemenea, $\mathrm{Cov}\left\{X_i, X_j\right\} = \mathrm{Cov}\left\{X_j, X_i\right\}$, deci matricea Σ este simetrică.

Exemplu: vector Gaussian



Densitatea comună Gaussiană a unui vector $\boldsymbol{X}$ se poate scrie:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top\right)$$

unde $\boldsymbol{\mu}$ este vectorul de valori medii şi Σ matricea de covarianţă (care trebuie să fie pozitiv definită, pentru ca $\det(\Sigma) > 0$ şi Σ^{-1} să existe).

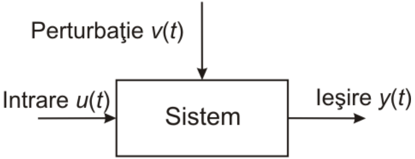
Proces stohastic

Definiţie

Un proces stohastic $\boldsymbol{X}$ este o secvenţă de variabile aleatoare $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_N)$.

Avem aşadar de-a face tot cu un vector de variabile aleatoare, cu o structură specifică: fiecare index din vector este asociat unui pas discret de timp k.

În identificarea sistemelor, semnalele (intrări, ieşiri, perturbaţii etc.) vor fi adesea procese stohastice.



Zgomot alb de medie zero

Definiţie

Un proces stohastic $\boldsymbol{X}$ este zgomot alb de medie zero dacă: $\forall k$, $\mathrm{E}\left\{X_k\right\} = 0$ (medie zero), şi $\forall k, k' \neq k$, $\mathrm{Cov}\left\{X_k, X_{k'}\right\} = 0$ (valorile la paşi diferiţi de timp sunt necorelate). În plus, varianţa $\mathrm{Var}\left\{X_k\right\}$ trebuie să fie finită $\forall k$.

Cu notaţie vectorială, aceste proprietăţi se pot scrie compact: media $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}\left\{\boldsymbol{X}\right\} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^N$ şi matricea de covarianţă $\Sigma = \mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{X}\right\}$ este diagonală (cu diagonala formată din numere finite şi pozitive).

În identificarea sistemelor, măsurătorile sunt adesea afectate de zgomote, şi vom presupune câteodată că aceste zgomote sunt albe şi de medie zero.

Proces staţionar

Valorile unui semnal la diferite moment de timp pot fi corelate (de ex. când semnalul depinde de ieşirea unui sistem dinamic). Vom presupune însă câteodată că semnalele sunt staţionare:

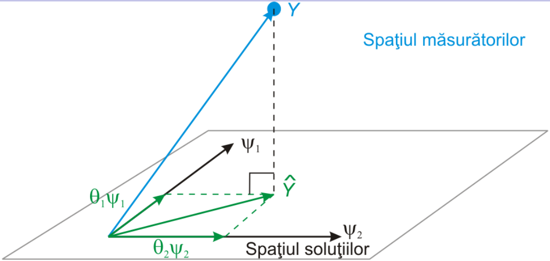
Definiţie

Procesul stohastic $\boldsymbol{X}$ este staţionar dacă $\forall k$, $\mathrm{E}\left\{X_k\right\} = \mu$, şi $\forall k, k', \tau$, $\mathrm{Cov}\left\{X_k, X_{k+\tau}\right\} = \mathrm{Cov}\left\{X_{k'}, X_{k'+\tau}\right\}$.

Media este aceeaşi la fiecare pas, iar covarianţa depinde doar de poziţiile relative ale paşilor de timp (şi nu de poziţiile lor absolute).

Conţinut

Interpretare geometrică



- Spaţiul tuturor vectorilor posibili de măsurători Y este un spaţiu vectorial N-dimensional.
- Notăm coloana i a matricii Φ cu ψ_i, $i = 1, \dots, n$. Observaţie: $\psi_i = [\varphi_i(1), \dots, \varphi_i(N)]^\top$.
- Atunci, spaţiul soluţiilor reprezentabile de către regresori este un subspaţiu vectorial n-dimensional generat de către vectorii $\psi_1, \dots, \psi_n$. Fiecare soluţie se obţine alegând valori pentru parametrii $\theta_1, \dots, \theta_n$ şi calculând combinaţia liniară $\sum_{i=1}^{n} \theta_i \psi_i$.
- Soluţia în sensul celor mai mici pătrate $\widehat{Y}$ este proiecţia vectorului măsurat Y pe acest subspaţiu.

Analiză: Ipoteze

1. Există un vector ideal de parametri θ_0 pentru care datele satisfac
$$y(k) = \varphi^\top(k)\theta_0 + e(k)$$
2. Procesul stohastic $e(k)$ este *zgomot alb de medie zero*, cu varianţa σ^2 la fiecare pas.

Intuiţie: Ipotezele presupun că datele reale sunt reprezentabile de către modelul ales, admiţând erori care se comportă bine din punct de vedere statistic.

Observaţie: Noile erori $e(k)$ au un înţeles diferit de valorile $\varepsilon(k)$ dinainte ($e(k)$ sunt erorile ideale date de parametrii ideali θ_0, iar $\varepsilon(k)$ sunt erorile reale generate de parametrii θ găsiţi în practică).

Analiză: Garanţii

Teoremă

1. Soluţia $\widehat{\theta}$ a problemei de tip CMMP este un *estimator nedeplasat* al lui θ_0. Acest lucru înseamnă că: $\mathrm{E}\left\{\widehat{\theta}\right\} = \theta_0$ unde valoarea medie este calculată peste distribuţia de probabilitate a datelor.
2. Matricea de covarianţă a soluţiei este:

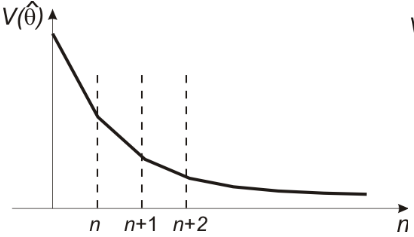
$$\mathrm{Cov}\left\{\widehat{\theta}\right\} = \sigma^2(\Phi^\top \Phi)^{-1}$$

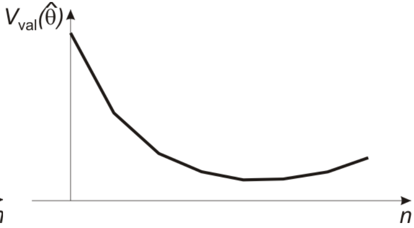
Intuiţie: Prima parte spune că soluţia are sens din punct de vedere statistic, iar partea a doua se poate interpreta ca un nivel de încredere în soluţie. De exemplu, erori ideale mai mici $e(k)$ au o varianţă σ^2 mai mică, ceea ce duce la covarinţe ale soluţiei mai mici – încredere mai mare că $\widehat{\theta}$ este aproape de valoarea ideală θ_0.

Observaţie: σ^2 este necunoscută, dar se poate estima cu formula $\frac{2V(\widehat{\theta})}{N-n}$ (reamintim că $V(\widehat{\theta}) = \frac{1}{2}[Y^\top Y - Y^\top \Phi(\Phi^\top \Phi)^{-1}\Phi^\top Y]$).

Alegerea modelului

Considerăm că dată fiind o complexitate a modelului (număr de parametri) n, putem genera regresori $\varphi(k)$ care fac modelul mai expresiv (de ex., funcţii de bază pe o grilă mai fină). Ne aşteptăm ca funcţia obiectiv (CMMP) să se comporte în următorul fel:





Putem aşadar creşte treptat valoarea lui n până când eroarea V nu mai scade, sau eroarea V_{val} pe datele de validare începe să crească.

Observaţie: Dacă datele sunt afectate de zgomot, creşterea exagerată a lui n va duce la supraantrenare: performanţe bune pe datele de identificare, dar proaste pe date diferite. Validarea pe un set separat de date este esenţială în practică!