

Identificarea sistemelor

Ingineria sistemelor, anul 3
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Lucian Buşoniu



Partea II

Analiza răspunsurilor la treaptă și impuls

Motivare

În general:

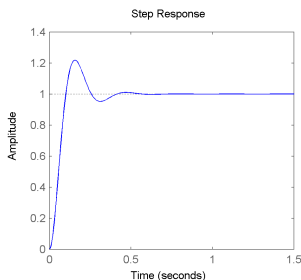
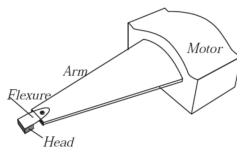
În anumite cazuri un model simplu de ordinul 1 sau 2 este suficient; analiza răspunsurilor la treaptă și impuls este o metodă ușoară de a obține astfel de modele.

Pentru studenți:

Metoda cea mai apropiată de cunoștințele de la teoria sistemelor
⇒ o tranziție mai ușoară către alte metode.

Reamintim

Cap de citire-scriere pentru un hard disk, cu intrarea = voltajul motorului, și ieșirea = poziția capului



Clasificare

Reamintim **clasificarea modelelor** din Partea I:

- 1 Modele mentale sau verbale
- 2 **Grafice și tabele**
- 3 Modele matematice, cu două subtipuri:
 - Modele analitice, din principii de bază
 - Modele din identificarea sistemelor

Răspunsurile la treaptă și impuls sunt modele grafice, aparținând celei de-a doua categorii.

Classificare (continuare)

Răspunsurile la treaptă și impuls sunt de asemenea **modele neparametrice**: sunt funcții de timp continuu care, în general, nu pot fi reprezentate printr-un număr finit de parametri.

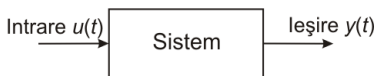
Studiul răspunsurilor la treaptă și impuls se numește *analiza în domeniul timp*.

De notat: În practică vom obține un model parametric (funcție de transfer) din modelul grafic neparametric.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Definiție sistem liniar

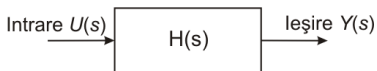


Un sistem este *liniar* dacă satisface principiile de:

Superpoziție: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u_1(t)$ cu ieșirea $y_1(t)$; și la $u_2(t)$ cu $y_2(t)$; atunci la intrarea $u_1(t) + u_2(t)$ va răspunde cu ieșirea $y_1(t) + y_2(t)$.

Omogeneitate: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u(t)$ cu ieșirea $y(t)$; atunci la $\alpha u(t)$ va răspunde cu $\alpha y(t)$.

Reprezentarea prin funcții de transfer



Funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \leq n$$

unde $U(s)$ și $Y(s)$ sunt, respectiv, transformatele Laplace ale semnalelor de intrare și ieșire în domeniul timp $u(t)$, $y(t)$.
(Important: în condiții inițiale nule.)

Transformata Laplace a unui semnal $f(t)$ este:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Interpretarea transformatei Laplace

- s se numește argument *complex* (este un număr complex), iar transformata Laplace efectuează trecerea a unei funcții din domeniul timp t în domeniul complex s .
- Avantajul este că multe operații aplicate uzual în inginerie (derivare, integrare etc.) devin mult mai simple în domeniul s .
- Intuitiv, $\mathcal{L}[f(t)]$ poate fi interpretată ca o reprezentare a funcției f sub formă de “componente exponențiale”, la fel cum transformata Fourier este o reprezentare sub formă de componente periodice.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Sistem de ordinul 1: Exemplu

Sistemele de ordinul 1 sunt frecvent întâlnite. Exemplu tipic: un sistem termic.

Considerăm un obiect la temperatura θ_1 (variabila de ieșire) plasat într-un mediu la temperatura θ_2 (variabila de intrare). Avem:

$$C\dot{\theta}_1(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{R}$$

unde C este inerția termică și R este rezistența termică.

Aplicăm transformata Laplace de ambele părți ale ecuației:

$$Cs\Theta_1(s) = \frac{\Theta_2(s) - \Theta_1(s)}{R}$$

obținând funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{\Theta_1(s)}{\Theta_2(s)} = \frac{1}{\frac{C}{R}s + 1}$$

Sistem de ordinul 1: Forma generală

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

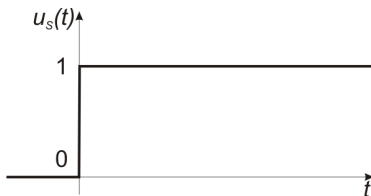
unde:

- K este factorul de proporționalitate (= 1 în exemplu)
- T este constanta de timp (= $\frac{C}{R}$ în exemplu)

Conținut

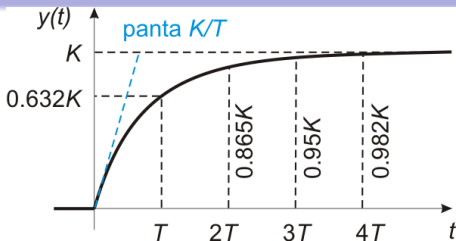
- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor**
 - Exemplu
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Semnalul treaptă ideal



$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Răspunsul la treaptă (indicial) de ordinul 1 ideal



Rezolvând ecuația diferențială pentru $y(t)$ (sau mai simplu: rezolvând pentru $Y(s)$ și aplicând transformata Laplace inversă \mathcal{L}^{-1}), obținem:

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

ducând la:



$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K(1 - 0) = K$$

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}, \quad \dot{y}(0) = \frac{K}{T} e^0 = \frac{K}{T}$$

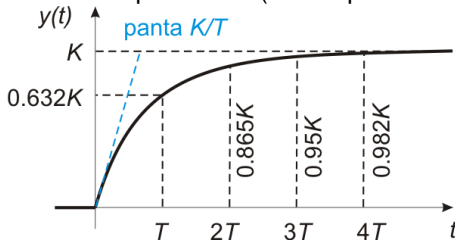
$$y(T) = K(1 - e^{-1}) \approx 0.632K$$

și în mod similar pentru $t = 2T, 3T, 4T$ (vezi figura).

Determinarea parameterilor

Până acum, totul cunoscut de la:  TS,  Modelarea proceselor.

Mai departe, considerăm că este dat răspunsul unui sistem real necunoscut: acesta este modelul neparametric. Îl vom folosi pentru a găsi o funcție de transfer aproximată (model parametric).



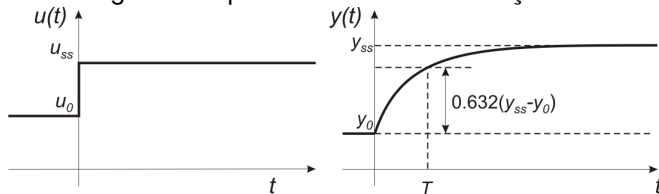
Algoritm pentru identificarea sistemului

- 1 Citește ieșirea în regim staționar. Factorul de proporționalitate K este egal cu această ieșire.
- 2 Găsește valoarea timpului la care ieșirea atinge 0.632 din valoarea staționară. Aceasta este constanta de timp T .

Condiții inițiale nenule

În practică, adeseori semnalul treaptă ideal nu poate fi folosit, fiindcă sistemul trebuie menținut în jurul unui punct de funcționare sigur/profitabil. Vom presupune că înaintea experimentului sistemul era în regim staționar la ieșirea y_0 cu intrarea constantă u_0 .

Realizarea practică a treptei este un semnal rectangular de tipul reprezentat în figură. Răspunsul sistemului este așadar non-ideal.

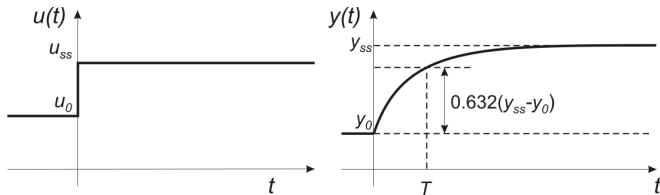


Dar sistemul este liniar! Noua intrare este $u(t) = u_0 + (u_{ss} - u_0)u_S(t)$ unde $u_S(t)$ este treapta ideală. Așadar, dacă notăm răspunsul la treaptă ideal cu $y_S(t)$, avem noua ieșire:

$$y(t) = y_0 + (u_{ss} - u_0)y_S(t)$$

adică o simplă translație și scalare a semnalului ideal.

Condiții inițiale nenule (continuare)



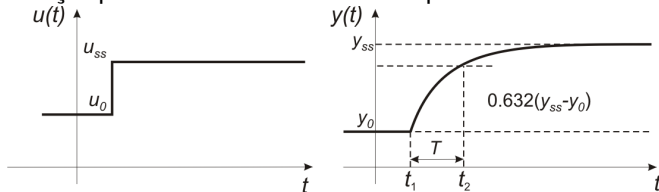
Obținem așadar:

$$y_{ss} = y_0 + (u_{ss} - u_0)K$$

$$y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0)$$

Condiții inițiale nenule: Algoritm general

Timpul la care are loc treapta poate fi și el diferit de 0, o problemă rezolvată ușor prin translatarea axei de timp.



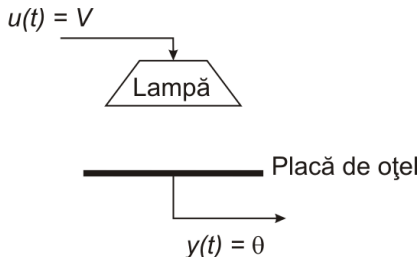
Algoritm general

- 1 Citește u_0 , y_0 , u_{ss} , y_{ss} , valorile inițiale și în regim staționar ale intrării și ieșirii. Calculează $K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0}$.
- 2 Citește timpul t_1 unde are loc treapta, și t_2 unde ieșirea urcă la 0.632 din diferență. Calculează $T = t_2 - t_1$.

Conținut

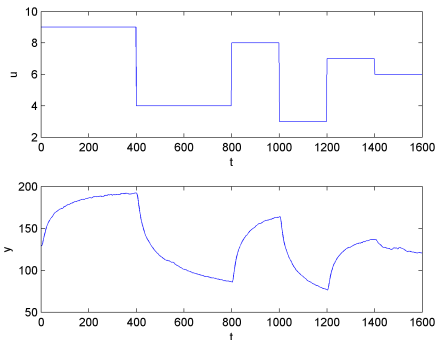
- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1**
 - Sisteme de ordinul 1
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu**
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu: Sistem termic



Considerăm sistemul termic din figură (diferit de exemplul anterior). Intrarea este voltajul V aplicat lămpii, iar ieșirea este temperatura θ citită de un termocuplu montat pe spatele plăcii de oțel.

Sistem termic: Date experimentale

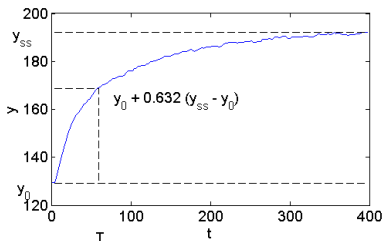


Datele sunt obținute din baza de date Daisy. Semnalele sunt în timp discret, cu $T_s = 2$ s, dar pentru analiza în domeniul timp le vom trata ca fiind în timp continuu.

De notat: prezența **zgomotului** în date! Zgomotul apare aproape întotdeauna în experimentele de identificare.

Vom folosi prima treaptă pentru identificare, și restul pentru validare.

Sistem termic: Model și parametri



Modelul neparametric este graficul, și îl vom folosi pentru estimarea unei funcții de transfer (parametrică).

Avem $y_{ss} \approx 192^\circ \text{C}$, $y_0 \approx 129^\circ \text{C}$. Intrarea $u_{ss} = 9 \text{ V}$ și știm din experiment că intrarea inițială $u_0 = 6 \text{ V}$. Așadar:

$$K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0} \approx \frac{192 - 129}{9 - 6} \approx 21$$

Mai departe, $y(T) = y_0 + 0.632(y_{ss} - y_0) \approx 169$, și identificând acest punct pe grafic obținem $T \approx 60$.

Sistem termic: Modelul ca funcție de transfer

$$\hat{K} = 21$$

$$\hat{T} = 60$$

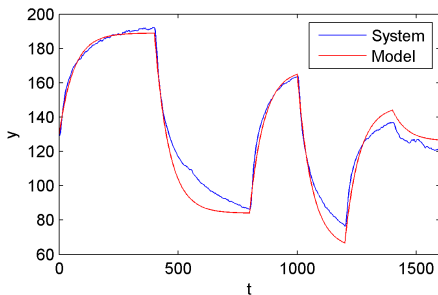
$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}}{\hat{T}s + 1} = \frac{21}{60s + 1}$$

Notăția $\hat{}$ evidențiază faptul că parametrii, și așadar modelul, sunt o aproximare.

Matlab: $H = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$, cu polinoamele `num` (numărător) și `den` (numitor) reprezentate prin vectori de coeficienți în ordinea descrescătoare a puterilor lui s .

(De notat: Calculele sunt de fapt efectuate cu numere `double` în Matlab, deci folosirea numerelor din prezentări va duce la rezultate ușor diferite. Această observație se aplică tuturor exemplurilor.)

Sistem termic: Validare

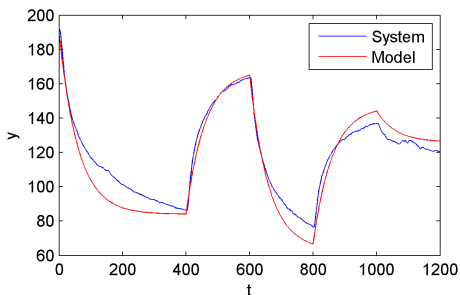


De notat că o este necesară procedură specială pentru a lua în considerare condiția inițială nenulă; o vom detalia când studiem răspunsul la impuls.

Modelul nu este excelent – de ex. dinamica de răcire este mai încetă decât cea de încălzire, deci în realitate sistemul nu este unul simplu de ordinul 1.

Cu toate acestea, funcția de transfer este suficientă pentru un prim model aproximativ – utilizarea tipică a analizei în domeniul timp.

Sistem termic: Validare (continuare)



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare (de la treapta 2 încolo):

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - y(k))^2 \approx 62.10$$

MSE are sens fiindcă datele sunt de fapt eșantionate în timp discret.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Sistem de ordinul 2: Exemplu

Sistemele de ordinul 2 sunt și ele adeseori întânite.



Considerăm o masă m atașată unui arc, căreia îi aplicăm o forță f (intrarea) în direcția opusă arcului. Măsurăm poziția x a masei relativ la poziția de repaus a arcului (ieșirea). Din legea a doua a lui Newton:

$$m\ddot{x}(t) = f(t) - kx(t)$$

unde k este constanta elastică a arcului.

Aplicând transformata Laplace de ambele părți:

$$ms^2X(s) = F(s) - kX(s)$$

ducând la funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

Sistem de ordinul 2: Forma generală

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

unde:

- K este factorul de proporționalitate ($= \frac{1}{k}$ în exemplu)
- ξ este factorul de amortizare ($= 0$ în exemplu)
- ω_n este pulsația naturală ($= \sqrt{k/m}$ în exemplu)

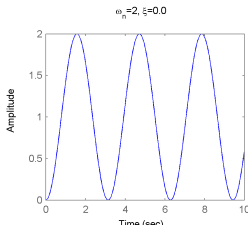
Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor**
 - Exemplu
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

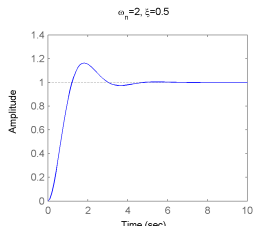
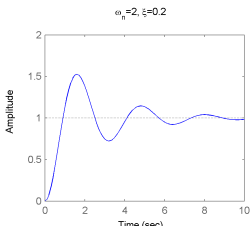
Forme tipice ale răspunsului la treaptă de ordinul 2

Factorul de amortizare ξ determină forma răspunsului.

$\xi = 0$, neamortizat

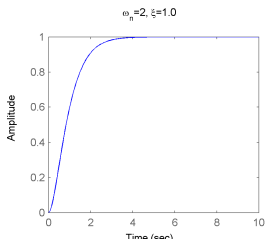


$\xi \in (0, 1)$, subamortizat; valori ξ mai mici duc la oscilații mai mari

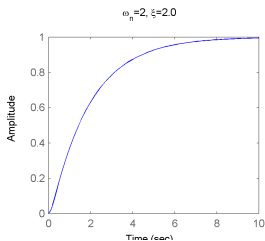


Forme tipice (continuare)

$\xi = 1$, critic amortizat



$\xi > 1$, supraamortizat



Răspuns la treaptă de ordinul 2 subamortizat

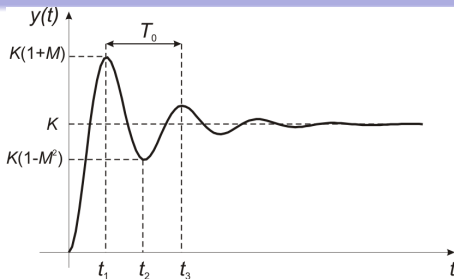
Ne ocupăm în principal de cazul subamortizat, $\xi \in (0, 1)$



Rezolvând pentru $y(t)$ obținem:

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arccos \xi) \right]$$

Caracteristicile răspunsului



Valoarea staționară: $\lim_{t \rightarrow \infty} K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\dots) \right] = K$

Aflăm maximele și minimele fixând derivata la zero:

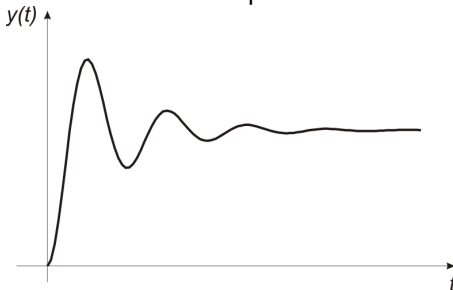
$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) = 0$$

$$\Rightarrow t_m = \frac{m\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \quad m \geq 0$$

$$y(t_m) = K[1 + (-1)^{m+1} M^m], \quad \text{unde suprareglajul } M = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

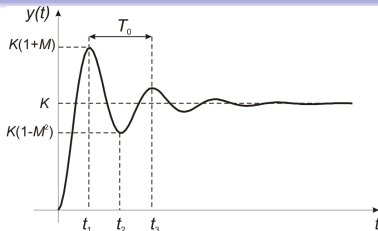
Model neparametric

Considerăm acum că este dat răspunsul unui sistem real necunoscut: acesta este modelul neparametric.



Folosind elementele de mai sus, vom afla o funcție de transfer aproximată (model parametric) a sistemului.

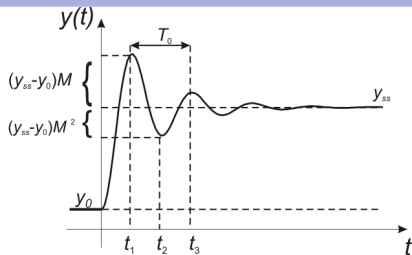
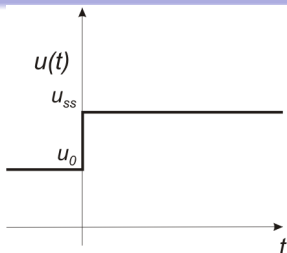
Determinarea parametrilor



Algoritm

1. Determină ieșirea staționară y_{ss} . Acesta este factorul de proporționalitate K .
2. Determină suprareglajul M , (a) din primul maxim: $M = \frac{y(t_1) - y_{ss}}{y_{ss}}$, sau (b) din raportul între primul minim și maxim: $M = \frac{y_{ss} - y(t_2)}{y(t_1) - y_{ss}}$.
3. Rezolvă $M = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, obținând $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 M}}$
4. Citește perioada de oscilație, între maxime succesive $T_0 = t_3 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$; sau de 2 ori maxim – minim, $T_0 = 2(t_2 - t_1)$. Apoi $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}}$, sau $\omega_n = \frac{2}{T_0} \sqrt{\pi^2 + \log^2 M}$.

Condiții inițiale nenule



Ca și la ordinul 1: noua intrare este $u(t) = u_0 + (u_{ss} - u_0)u_S(t)$, iar noua ieșire este versiunea traslatată și scalată a răspunsului ideal $y_S(t)$: $y(t) = y_0 + (u_{ss} - u_0)y_S(t)$. Algoritm modificat:

1 Factor de proporționalitate $K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0}$.

2 Suprareglaj (a) $M = \frac{y(t_1) - y_{ss}}{y_{ss} - y_0}$ (trebuie scăzut y_0), sau (b)

$M = \frac{y_{ss} - y(t_2)}{y(t_1) - y_{ss}}$ (nici o schimbare aici).

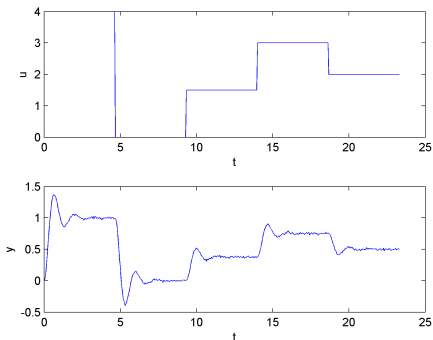
ξ , T_0 : la fel ca înainte.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu**
 - Remarci adiționale
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu de ordinul 2

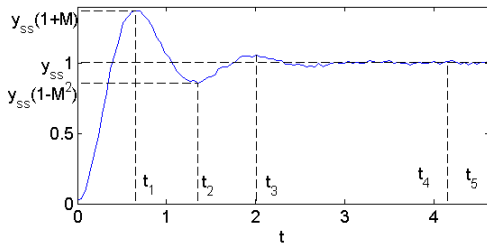
Datele sunt generate în simulare, 500 de eșantioane cu perioada de eșantionare ≈ 0.047 .



De notat din nou zgomotul. De asemenea, condițiile inițiale sunt nule ($u_0 = y_0 = 0$) dar treptele au valori nonstandard, diferite de 1.

Folosim prima treaptă pentru identificare, și treptele 3–5 pentru validare, (treapta 2 readuce sistemul în condiții nule).

Exemplu: Răspunsul la treaptă pentru identificare

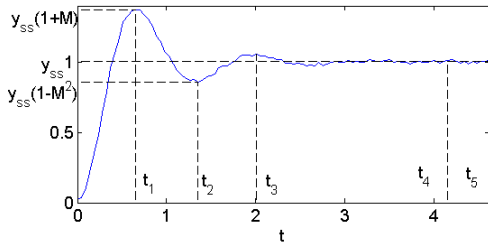


Cum ieșirea este afectată de zgomot, vom determina valoarea sa staționară prin efectuarea **mediei** câtorva eșantioane din regim staționar, mai exact eșantioanele de la 90 la 100, între t_4 and t_5 :

$$y_{ss} \approx \frac{1}{11} \sum_{k=90}^{100} y(k) \approx 1.00$$

Citim pe grafic: $t_1 \approx 0.65$, $t_2 \approx 1.35$, $t_3 \approx 1.96$, $y(t_1) \approx 1.37$, $y(t_2) \approx 0.86$. De asemenea, $u_{ss} = 4$.

Exemplu: Determinarea parametrilor



① Factor de proporționalitate $K = \frac{y_{ss} - y_0}{u_{ss} - u_0} = \frac{y_{ss}}{u_{ss}} \approx 0.25$.

② Suprareglaj $M = \frac{y(t_1) - y_{ss}}{y_{ss} - y_0} = \frac{y(t_1) - y_{ss}}{y_{ss}} \approx 0.36$.

③ Factor de amortizare $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 M}} \approx 0.31$.

④ Perioada $T_0 = t_3 - t_1 \approx 1.31$, ducând la pulsația naturală

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \approx 5.05.$$

Exemplu: Modelul ca funcție de transfer

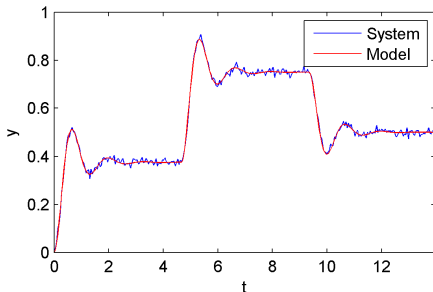
$$\hat{K} = 0.25$$

$$\hat{\xi} = 0.31$$

$$\hat{\omega}_n = 5.05$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}\hat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} = \frac{6.38}{s^2 + 3.09s + 25.51}$$

Exemplu: Validare



Calitatea modelului este foarte bună (ceea ce nu este surprinzător, datele fiind generate în simulare).

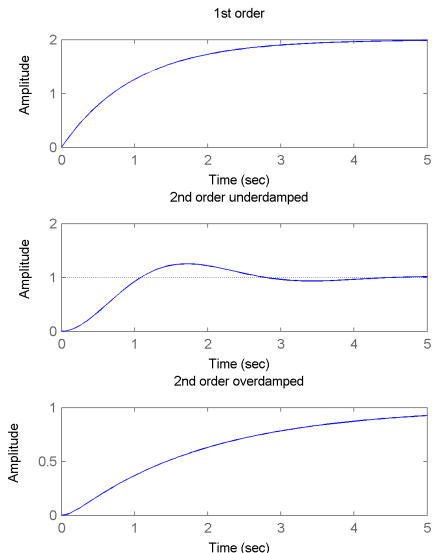
Eroarea medie pătratică (MSE):

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - y(k))^2 \approx 9.66 \cdot 10^{-5}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2**
 - Sistem de ordinul 2
 - Răspuns la treaptă. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale**
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

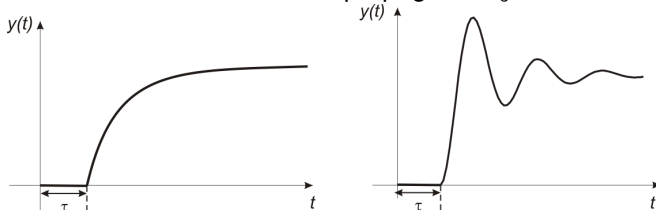
Alegerea ordinului



Chiar dacă este critic sau supraamortizat, la $t = 0$ răspunsul unui sistem de ordinul 2 va avea derivata egală cu 0: va fi **tangent la axa timpului**. În schimb, panta tangentei este de K/T pentru sistemele de ordinul 1.

Întârzieri

Răspunsul unui sistem de ordinul 1 sau 2 **cu întârzierea τ** are aceeași formă ca și mai sus, dar după ce intrarea se schimbă, există o întârziere τ înainte ca efectul să se propage la ieșire.



Întârzierea este reprezentată în funcția de transfer după cum urmează:

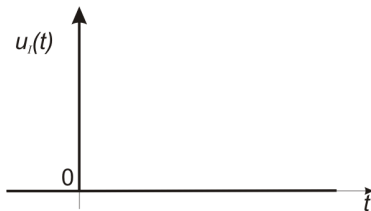
$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-s\tau}, \quad H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-s\tau}$$

Valoarea lui τ se citește direct pe grafic.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1**
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Intrarea impuls ideală



Impulsul ideal este funcția delta a lui Dirac. O definiție informală:

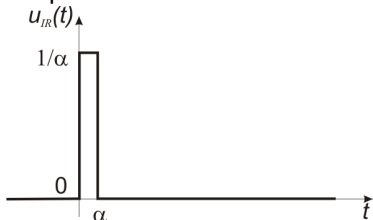
$$u_I(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

cu o condiție suplimentară: $\int_{-\infty}^{\infty} u_I(t) dt = 1$.

(De fapt, impulsul ideal nu este o funcție, ci o așa-numită distribuție.)

Realizarea practică a impulsului

În realitate, evident nu putem crea semnale de amplitudine infinită. Impulsul este așadar aproximat de către un semnal rectangular:



$$u_{IR}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & t \in [0, \alpha) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

unde $\alpha \ll$ (mult mai mic decât constantele de timp ale sistemului).

De notat că dreptunghiul are aria 1, $\int_{-\infty}^{\infty} u_{IR}(t) dt = 1$.

Această aproximare introduce diferențe (erori) față de răspunsul real la impuls, dar pentru α mic eroarea este acceptabilă. Vom dezvolta analiza în cazul ideal, dar exemplele folosesc realizarea practică.

○ proprietate utilă a răspunsului la impuls

În domeniul complex:

$$\text{treapta } U_S(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{impulsul } U_I(s) = 1$$

Reamintim că răspunsul în domeniul timp al unui sistem se poate scrie: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, iar $Y(s) = H(s)U(s)$.

Deci:

$$Y_S(s) = \frac{1}{s} Y_I(s), \quad Y_I(s) = s Y_S(s)$$

$$y_S(t) = \int_0^t y_I(\tau) d\tau, \quad y_I(t) = \dot{y}_S(t)$$

Răspunsul la impuls este *derivata răspunsului la treaptă*.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1**
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor**
 - Exemplu
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

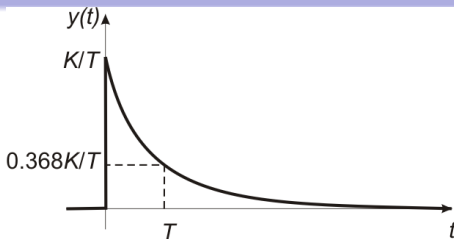
Reamintim: Sistem de ordinul 1

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

unde:

- K este factorul de proporționalitate
- T este constanta de timp

Răspunsul la impuls de ordinul 1 ideal



Folosind relația cu răspunsul la treaptă, și derivata acestui răspuns pe care am calculat-o deja, avem direct răspunsul la impuls:

$$y_1(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$

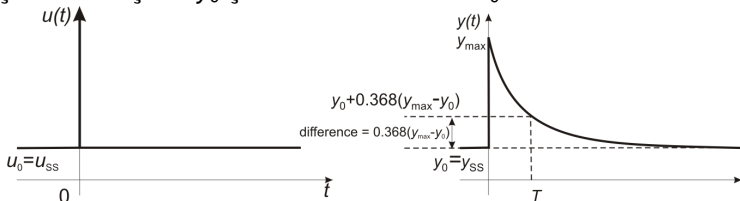
de unde rezultă:

$$\begin{cases} y_1(0) = \frac{K}{T} = y_{\max} \\ y_1(T) = \frac{K}{T} e^{-1} = y_{\max} e^{-1} \approx 0.368 y_{\max} \end{cases}$$

De notat: $y_1(4T) = 0.0183 y_{\max}$, ieșirea este aproximativ staționară după $4T$.

Condiții inițiale nenule

În condiții inițiale nenule, impulsul este translatat pe axa verticală. Vom presupune că la înaintea experimentului sistemul era în regim staționar cu ieșirea y_0 și intrarea constantă u_0 .



Din liniaritatea sistemului, și intrarea fiind $u(t) = u_0 + u_1(t)$, avem o ieșire translatată $y(t) = y_0 + y_1(t)$. Intrarea nu este scalată, fiindcă rezultatul nu ar mai fi un impuls aproximativ (aria ar fi diferită de 1).

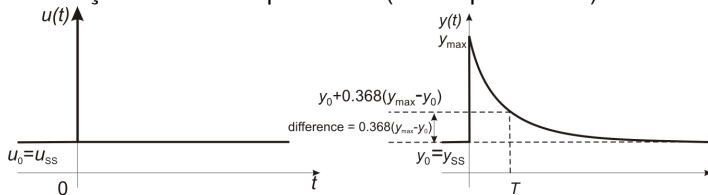
Așadar, comportamentul este:

$$\begin{cases} y_{\max} = y_0 + \frac{K}{T} \\ y(T) = y_0 + 0.368(y_{\max} - y_0) \end{cases}$$

De notat că $u_0 = u_{ss}$, $y_0 = y_{ss}$.

Determinarea parametrilor

Considerăm acum că este dat răspunsul la impuls al unui sistem real necunoscut (model neparametric). Vom folosi acest răspuns pentru a găsi o funcție de transfer aproximată (model parametric).

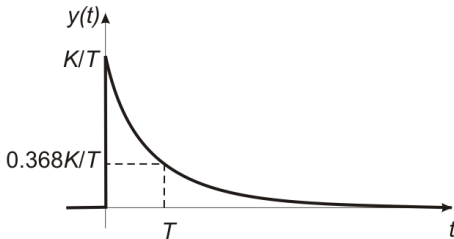


Presupunem întâi condiții inițiale nenule fiindcă sunt favorabile: oferă o metodă robustă de a estima factorul de proporționalitate K .

Algoritm

- 1 Citește ieșirea staționară (sau inițială) $y_{ss} = y_0$, la fel și intrarea $u_{ss} = u_0$. Apoi, $K = y_{ss}/u_{ss}$.
- 2 Citește y_{max} și citește constanta de timp T la momentul în care ieșirea descrește la 0.368 din diferența $y_{max} - y_0$.

Determinarea parametrilor în condiții inițiale nule



Putem estima factorul de proporționalitate folosind $y_{\max} = \frac{K}{T}$, dar în practică această metodă nu este la fel de precisă, datorită zgomotului și a caracterului non-ideal al impulsului.

Algoritm

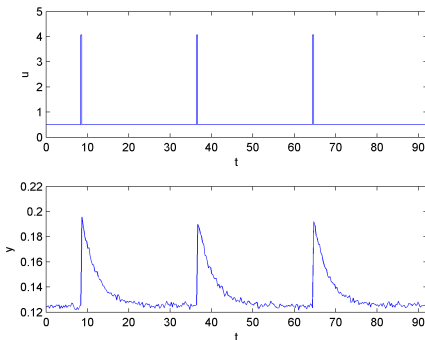
- 1 Citește y_{\max} și determină timpul la care ieșirea descrește la 0.368 din y_{\max} . Aceasta este constanta de timp T .
- 2 Calculează $K = y_{\max} T$.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1**
 - Semnal impuls. Relația între răspunsurile la treaptă și impuls
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2

Exemplu de ordinul 1

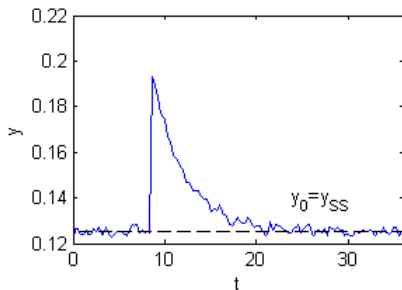
Date generate în simulare, 330 eșantioane cu $T_s = 0.28$ (30 eșantioane partea staționară inițială, apoi câte 100 pentru fiecare impuls). Impulsurile sunt realizate prin dreptunghiuri cu $\alpha = T_s = 0.28$ și amplitudine $1/\alpha \approx 3.57$.



De notat zgomotul de măsurare și condițiile inițiale nenule.

Folosim primul impuls pentru identificare și celelalte pentru validare.

Exemplu: Model și parametri

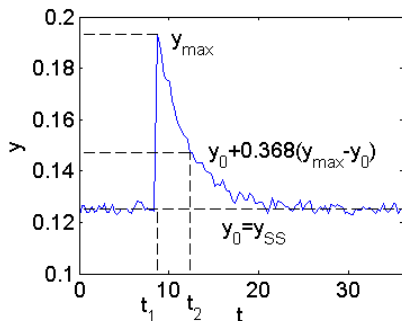


Folosim graficul pentru a estima funcția de transfer. Avem $u_0 = u_{ss} = 0.5$.

Găsim ieșirea staționară (egală cu cea inițială) efectuând media câtorva eșantioane:

$$y_{ss} = y_0 \approx \frac{1}{11} \sum_{k=120}^{130} y(k) \approx 0.13$$

Exemplu: Model și parametri (continuare)



leșirea maximă este $y_{\max} \approx 0.19$, atinsă la $t_1 \approx 8.86$. Valoarea $y_0 + 0.368(y_{\max} - y_0) \approx 0.15$ este atinsă la $t_2 \approx 12.60$. Așadar:

- 1 $K = y_{SS}/u_{SS} \approx 0.25$.
- 2 $T = t_2 - t_1 \approx 3.92$.

De notat că luăm în considerare timpul nenul t_1 la care este aplicat impulsul!

Exemplu: Modelul ca funcție de transfer

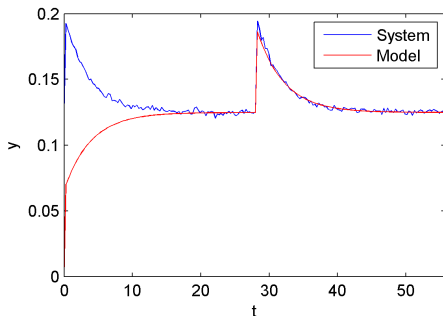
$$\hat{K} = 0.25$$

$$\hat{T} = 3.92$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}}{\hat{T}s + 1} = \frac{0.25}{3.92s + 1}$$

Exemplu: Validare

Comparăm datele de la sistem cu răspunsul modelului la intrarea de validare (impulsurile 2 și 3):



Simularea nu ia în considerare condițiile inițiale nenule ale sistemului, și de aceea partea inițială are diferențe mari.

Vom prezenta o metodă de simulare din condiții inițiale nenule, care funcționează nu doar pentru impulsuri, ci pentru *orice* semnal de intrare (treaptă, etc.).

Model în spațiul stărilor pentru un sistem de ordinul n

Un **model în spațiul stărilor**, în timp continuu, reprezintă un sistem liniar sub forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

unde:

- x este vectorul de stare, $x \in \mathbb{R}^n$ cu n ordinul sistemului
- u și y sunt intrarea și ieșirea obișnuite. Pot fi vectori dacă sistemul are mai multe intrări sau ieșiri, dar aici semnale scalare sunt suficiente.
- Matricile A de stare, B de intrare, C de ieșire, D de transfer direct. Acestea au dimensiunile potrivite, aici: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (vector datorită intrării scalare), $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (vector datorită ieșirii scalare), $D \in \mathbb{R}$ (un scalar, de obicei 0).

Model în spațiul stărilor pentru un sistem de ordinul 1

Pornind de la funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

și întorcându-ne în domeniul timp, dinamica sistemului este:

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{T}y(t) + \frac{K}{T}u(t)$$

Luând $x = y$ (cum sistemul este de ordinul 1, o singură variabilă de stare este suficientă), putem scrie:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{1}{T}x(t) + \frac{K}{T}u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

deci modelul în spațiul stărilor are $A = -\frac{1}{T}$, $B = \frac{K}{T}$, $C = 1$, $D = 0$.

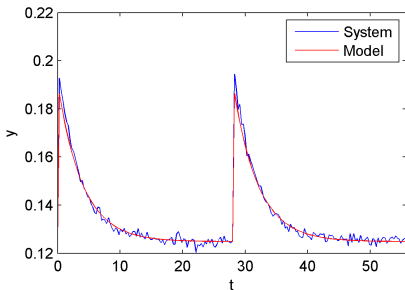
Înapoi la exemplu: Model aproximat în spațiul stărilor

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\hat{T}}x(t) + \frac{\hat{K}}{\hat{T}}u(t) = -0.26x(t) + 0.06u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

Matlab: `HSS = ss(A, B, C, D)`

Exemplu: Validare din condiția inițială corectă

Pentru a lua condiția inițială în considerare, inițializăm $x(0) = y_0$ la începutul simulării.



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \approx 3.74 \cdot 10^{-6}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale

Reamintim: Sistem de ordinul 2

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

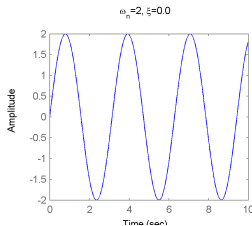
unde:

- K este factorul de proporționalitate
- ξ este factorul de amortizare
- ω_n este pulsația naturală

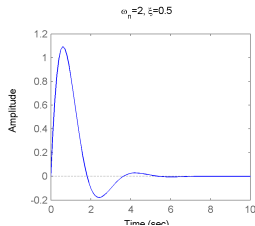
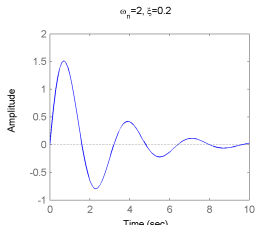
Forme tipice ale răspunsului la impuls de ordinul 2

Ca și la treaptă, factorul de amortizare ξ determină forma răspunsului

$\xi = 0$, neamortizat

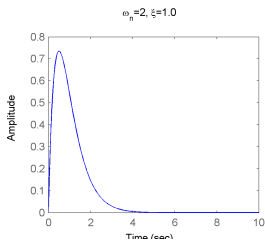


$\xi \in (0, 1)$, **subamortizat** – ne vom concentra pe acest caz

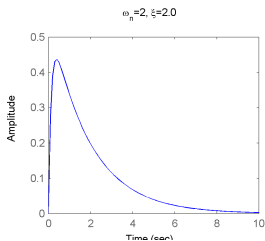


Forme tipice (continuare)

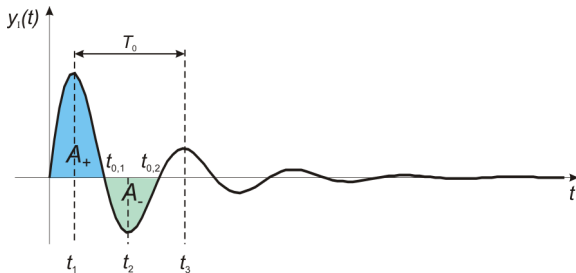
$\xi = 1$, critic amortizat



$\xi > 1$, supraamortizat



Răspunsul la impuls subamortizat

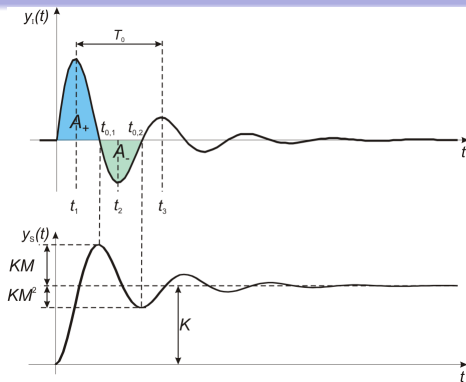


Folosind derivata răspunsului la treaptă calculată mai sus, avem răspunsul la impuls:

$$y_1(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$$

Observăm deja că perioada este neschimbată, deci $T_0 = t_3 - t_1 = 2(t_2 - t_1)$.

Răspunsul la impuls subamortizat (continuare)

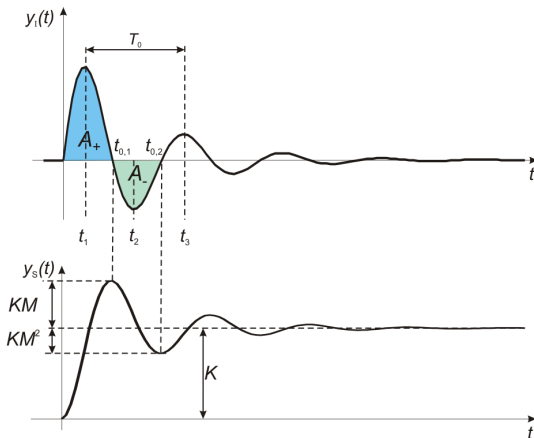


Cum $y_s(t) = \int_0^t y_i(\tau) d\tau$, și reamintindu-ne valorile primului maxim și minim din răspunsul la treaptă în funcție de suprareglajul M :

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} y_i(\tau) d\tau = y_s(t_{0,1}) = K + KM, \quad A_- = - \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} y_i(\tau) d\tau =$$

$$= -[y_s(t_{0,2}) - y_s(t_{0,1})] = -[K - KM^2 - (K + KM)] = KM^2 + KM$$

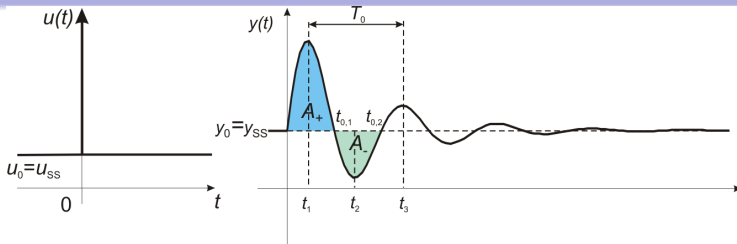
Răspunsul la impuls subamortizat (continuare)



Obținem așadar:

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{KM^2 + KM}{K + KM} = M$$

Condiții inițiale nenule: estimarea lui K



În condiții inițiale nenule, impulsul este translatat, $u(t) = u_0 + u_1(t)$, ducând la $y(t) = y_0 + y_1(t)$. De notat că $u_0 = u_{ss}$, $y_0 = y_{ss}$.

Din valorile staționare estimăm **factorul de proporționalitate**: $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$.
 Perioada T_0 nu se schimbă, dar ariile trebuie să găsim **relativ la ieșirea staționară**:

$$A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau = K + KM$$

$$A_- = - \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y(\tau) - y_0) d\tau = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau = KM^2 + KM$$

Determinarea parametrilor

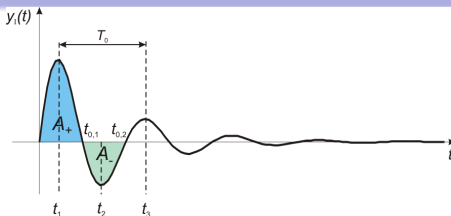
Dat fiind răspunsul la impuls al unui sistem necunoscut:

Algoritm

- 1 Determină ieșirea și intrarea staționară y_{ss} , u_{ss} . Factorul de proporționalitate este $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$.
- 2 Citește valorile de timp unde $y(t)$ intersectează y_{ss} : $t_{0,1}$, $t_{0,2}$. Calculează ariile $A_+ = \int_0^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau$,
 $A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau$. Găsește suprapreglajul $M = \frac{A_-}{A_+}$.
- 3 Factorul de amortizare este $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 M}}$.
- 4 Citește valorile de timp la maxime, t_1 , t_3 , sau la maxim și minim t_1 , t_2 . Calculează perioada $T_0 = t_3 - t_1$, sau $T_0 = 2(t_2 - t_1)$.
- 5 Pulsația naturală: $\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$, sau $\omega_n = \frac{2}{T_0} \sqrt{\pi^2 + \log^2 M}$.

De notat că relațiile între M , T_0 , ξ , și ω_n sunt valide în general, deci pașii 3 și 5 folosesc aceleași formule ca și pentru treaptă.

Estimarea lui K în condiții inițiale nule



Rezolvăm $\dot{y}(t) = 0$ pentru a obține t_1 pentru primul maxim, și îl înlocuim în $y(t)$ pentru a obține valoarea maximă în sine. Obținem după câteva calcule:

$$y(t_1) = K\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

relație ce poate fi folosită pentru a estima factorul de proporționalitate: $K = \frac{y(t_1)}{\omega_n e^{-\frac{\xi \arccos \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$. Este nevoie de ξ și ω_n , care pot fi calculate cu metodele de mai sus independent de condiția inițială.

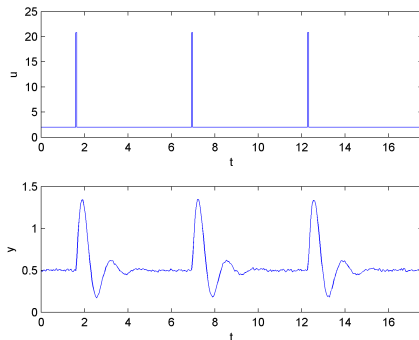
Din aceleași motive ca la ordinul 1, această metodă este mai puțin precisă decât determinarea lui K din valori staționare nenule.

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 **Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - **Exemplu**
 - Remarci adiționale

Exemplu de ordinul 2

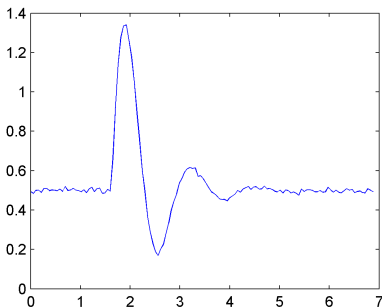
Simulare, 330 de eşantioane cu perioada de eşantionare ≈ 0.053 .



Din nou avem condiții inițiale nenule, și ca de obicei zgomot de măsurare.

Vom folosi primul impuls pentru identificare și celelalte două pentru validare.

Exemplu: Valori staționare și factor de proporționalitate

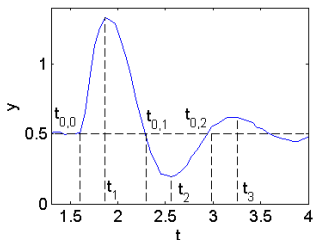


Avem $u_0 = u_{ss} = 2$.

Determinăm ieșirea staționară (egală cu cea inițială) prin efectuarea mediei ultimelor 11 eșantioane:

$$y_{ss} = y_0 \approx \frac{1}{11} \sum_{k=120}^{130} y(k) \approx 0.5$$

Exemplu: Factor de amortizare



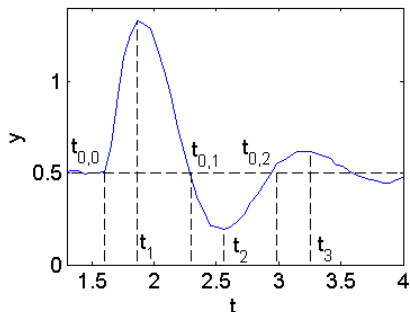
Citim $t_{0,0} \approx 1.6$, $t_{0,1} \approx 2.3$, $t_{0,3} \approx 2.99$. Trebuie ținut cont că impulsul este **aplicat la timpul $t_{0,0} \neq 0$** . Ariile sunt estimate numeric:

$$A_+ = \int_{t_{0,0}}^{t_{0,1}} (y(\tau) - y_0) d\tau \approx T_s \sum_{k=k_{0,0}}^{k_{0,1}} (y(k) - y_0) \approx 0.34$$

$$A_- = \int_{t_{0,1}}^{t_{0,2}} (y_0 - y(\tau)) d\tau \approx T_s \sum_{k=k_{0,1}}^{k_{0,2}} (y_0 - y(k)) \approx 0.12$$

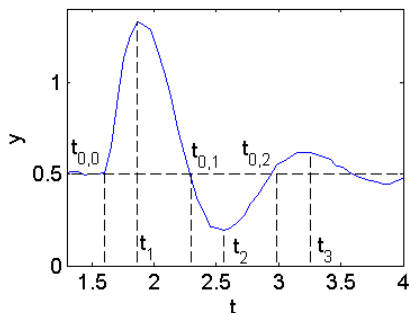
unde $k_{0,0}$, $k_{0,1}$, $k_{0,2}$ indicii eşantioanelor corespunzând la $t_{0,0}$, $t_{0,1}$, $t_{0,2}$.

Exemplu: Factor de amortizare (continuare)



Din aceste arii, $M = \frac{A_-}{A_+} \approx 0.36$, și $\xi = \frac{\log 1/M}{\sqrt{\pi^2 + \log^2 M}} \approx 0.31$.

Exemplu: Perioada de oscilație



Citim $t_1 \approx 1.92$ și $t_3 \approx 3.2$, ducând la $T_0 = 1.28$. De aici,

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}} \approx 5.16.$$

Exemplu: Modelul ca funcție de transfer

$$\hat{K} = 0.25$$

$$\hat{\xi} = 0.31$$

$$\hat{\omega}_n = 5.16$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{K}\hat{\omega}_n^2}{s^2 + 2\hat{\xi}\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} = \frac{6.64}{s^2 + 3.21s + 26.68}$$

Model în spațiul stărilor pentru un sistem de ordinul 2

Reamintim că pentru a simula modelul din condiții nenule, avem nevoie de un model în spațiul stărilor $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$. Pornind de la $H(s)$ și trecând în domeniul timp:

$$\ddot{y}(t) = -2\xi\omega_n\dot{y}(t) - \omega_n^2y(t) + K\omega_n^2u(t)$$

Luând $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ (fiindcă sistemul are ordinul 2), scriem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -2\xi\omega_nx_2(t) - \omega_n^2x_1(t) + K\omega_n^2u(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\omega_n^2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{aligned}$$

de unde se obțin imediat matricile A , B , C , D .

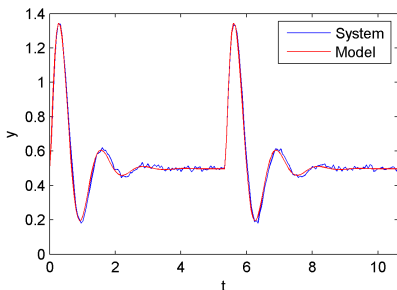
Înapoi la exemplu: Model (aproximat) în spațiul stărilor

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -26.68 & -3.22 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6.64 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = [1 \quad 0] x(t) + 0u(t)$$

unde x este vectorul de stare, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.

Exemplu: Validare

Pentru a porni din condiția inițială nenulă, inițializăm $x_1(0) = y_0, x_2(0) = 0$ la începutul simulării (pornim din regim staționar, de aceea $x_2(0) = \dot{y}(0) = 0$).



Eroarea medie pătratică (MSE) pe datele de validare:

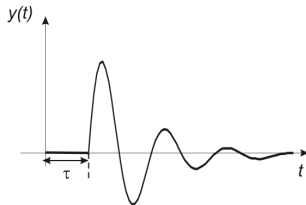
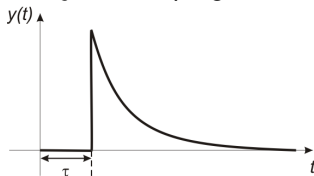
$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \approx 8 \cdot 10^{-4}$$

Conținut

- 1 Recapitulare: Modele liniare în timp continuu
- 2 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 1
- 3 Analiza răspunsului la treaptă al sistemelor de ordinul 2
- 4 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 1
- 5 Analiza răspunsului la impuls al sistemelor de ordinul 2**
 - Răspuns la impuls. Determinarea parametrilor
 - Exemplu
 - Remarci adiționale**

Întârzieri

Ca și cel la treaptă, răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul 1 sau 2 **cu întârzierea** τ are forma tipică, dar după schimbarea intrării există o întârziere τ până când efectul se propagă la ieșire. Valoarea lui τ se citește direct pe grafic.



Funcții de transfer:

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-s\tau}, \quad H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-s\tau}$$